ZADACI
IZ
ALGEBRE I GEOMETRIJE
(S UPUTAMA I REZULTATIMA)

ZA SREDNJE ŠKOLE

SASTAVIO
O. BERNARDO BRIXY FRANJEVAC
PROFESOR NA NADB. VELIKOJ GIMNAZIJI U ZAGREBU.



ZAGREB 1923.
TISAK I NAKLADA HRVATSKOG ŠTAMPARSKOG ZAVODA D. D.

ZADACI

IZ

ALGEBRE I GEOMETRIJE

(S UPUTAMA I REZULTATIMA)

ZA SREDNJE ŠKOLE

SASTAVIO

O. BERNARDO BRIXY FRANJEVAC

PROFESOR NA NADB. VELIKOJ GIMNAZIJI U ZAGREBU.



ZAGREB 1923.

TISAK I NAKLADA HRVATSKOG ŠTAMPARSKOG ZAVODA D. D.

PREDGOVOR

Zadatke iz algebre i geometrije, što ih u ovoj knjizi pružam đacima srednjih škola, a napose maturantima, sastavio sam pripravljajući 8-školce, što u školi, što privatno, za maturu. Stoga sam imao pred očima, da đak u tim zadacima ponovi svu građu, koja je prema današnjim propisima za maturu potrebna. Jer su ovi zadaci namijenjeni i slabim đacima kao i privatistima, iznosim u ovoj knjizi i takve zadatke, kojima je svrha, da đaka uvedu u rješavanje težih problema algebre i geometrije pružajući im prilike, da steknu potrebnu vještinu u primjenjivanju različnih formula i poučaka. Time je ova knjiga podesna i za đake svih gornjih razreda gimnazije i njoj sličnih škola.

Prema najnovijoj školskoj osnovi ušao je u srednje škole infiniteizmalni račun (derivacije i integral) s jednostavnijim primjenama. Jer je baš po infinitezimalnom računu matematična obuka mnogo dobila na svojoj zanimljivosti i praktičnosti, svratio sam na taj dio matematike osobitu pažnju i sastavio mnogo zadataka. Pri tom sam uzeo mnoge implicitne funkcije, koje izbjegavajući pojam diferencijala deriviram po pravilu $y' = -f'_x / f'_y$. (Kako se to pravilo dade u srednjoj školi lako izvesti, pokazao sam u ovogodišnjem „Nastavnom Vjesniku").

Zadatke sam velikom većinom sastavio sam (oko 900), a proradio sam ih sve dodavši im — katkada i opširnije — upute s rezultatima. Svu sam građu iz algebre i geometrije svrstao u 35 paragrafa. Što jedni paragrafi sadržaju manje, a drugi više zadataka, razlog je manja ili veća važnost građe, koju paragraf obrađuje.

Da se u zbirci lakše nađu zadaci, u kojima se primjenjuje derivacija, skupio sam ih u jedan paragraf (31.), makar se dade derivacija primijeniti i kod mnogih

analitičkih zadataka sakupljenih u drugim paragrafima. Da deriviranje i integriranje pobudi u đaka veći interes, sastavio sam dosta primjera iz fizike (§§ 32. i 34.). Kod ovih sam stavio opširniju uputu — pače i u sam tekst — jer je svrha tih primjera vježbanje u deriviranju i integriranju, a ne rješavanje fizikalnih problema.

U „dodatku" (§ 35.) sakupio sam nekoliko zadataka nesimetričnih jednadžbi višega stepena, koje se mogu lako riješiti pomoću Hornerove divizije, i to načinom, kako sam priopćio god. 1920. u „Nastavnom Vjesniku", godištu XXVIII. u brojevima 7. i 8. Na to me naveo interes đaka, koji se smatraju skučenima, ako znadu rješavati samo simetrične jednadžbe.

Što se tiče metoda u rješavanju zadataka, čuvao sam se jednoličnosti. Kako se tipični problemi rješavaju, uči đak u školi, a pokazuje mu to i školski udžbenik (na koji sam se u ovoj zbirci primjera uvijek obazirao). Zato ima u ovom djelu primjera iste vrsti s različnim uputama. Time sam htio polučiti to, da se boljem đaku duh ne umara radeći „po istom kalupu" i da ga upozorim, kako se i iste vrste zadaci mogu rješavati na različne načine.

Još mi je spomenuti, da sam kod zadataka kamatnoga i rentnoga računa često upotrebljavao ne logaritme, nego tablice za q^n. (Vidi Majcen-Schlömilch: Logaritmičke tablice str. 182. ili Studnička-Segen: Logaritmičke tablice str. 142.)

Nadam se, da će đak vježbajući ove zadatke steći pregled matematičkih metoda i time da će si uvijek moći odabrati onaj način rješavanja zadataka, koji mu je najzgodniji, odnosno koji ga najmanje umara.

Trud mi je oko sastavljanja ovih zadataka obilno nagrađen, ako sam ovom zbirkom đaku pružio polakšicu u učenju matematike, ako sam mu pokazao put, kako će izrađivati matematičke zadaće.

Zagreb, u srpnju 1923.

Autor.

ALGEBRA.

§ 1. KVADRATNE I IRACIONALNE JEDNADŽBE.

Riješi jednadžbe:

1. $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{2}{3}$.

Riješi se nazivnika. $x_1 = 0,\ x_2 = -15$.

2. $\frac{5}{x^2+6x+2} = \frac{3}{x^2+6x+1} - \frac{4}{x^2+6x+8}$.

Stavi: $x^2+6x+1 = y$. $x_1 = 0,\ x_2 = -6,\ x_{3,4} = -3 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

3. $x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$.

Stavi: $\sqrt{x} = y$. $x_1 = \frac{4}{9},\ x_2 = 4$.

4. $3x - 7\sqrt{x} = 6$.

Stavi: $\sqrt{x} = y$. $x = 9$.

Riješi grafički jednadžbe.

5. $x^2+3x+2 = 0$.

Nađi presjek parabole $y = x^2$ i pravca $y = -3x-2$. $x_1 = -1,\ x_2 = -2$.

6. $x^2+4x+3 = 0$.

Uputa analogna onoj kod zadatka 5. $x_1 = -1,\ x_2 = -3$.

7. $x^2-6x+9 = 0$.

Uputa analogna onoj kod zadatka 5. $x_{1,2} = 3$.

8. $4x^2-12x+9 = 0$.

Uputa analogna onoj kod zadatka 5. $x_{1,2} = \frac{3}{2}$.

Nađi jednadžbe s korijenima:

9. $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.
$(x-4)(x+4)=0$ ili $x^2-16=0$.

10. $x_1 = -6$, $x_2 = -1$.
$(x+6)(x+1)=0$ ili $x^2+7x+6=0$.

11. $x_1 = 2$, $x_2 = 12$.
$(x-2)(x-12)=0$ ili $x^2-14x+24=0$.

12. $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$.
$(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0$ ili $x^2-2x-1=0$.

13. $x_1 = 1+i$, $x_2 = 1-i$.
$(x-1-i)(x-1+i)=0$ ili $x^2-2x+2=0$.

14. $x_1 = 1+2i$, $x_2 = 2+3i$.
$(x-1-2i)(x-2-3i)=0$ ili $x^2-(3+5i)x-4+7i=0$.

Riješi jednadžbe:

15. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$; $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{16}$.
Stavi: $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$. $x_1=2$, $x_2=4$, $y_1=4$, $y_2=2$.

16. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{5}$; $xy=36$.
Stavi: $x-y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ i skrati prvu jednadžbu s $\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Dobivena jednadžba jest $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$. Druga se jednadžba može pisati ovako: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\pm 6$. Odatle izrazi $\sqrt{y}$ i uvrsti u $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$. Dobit ćeš: $x^2-13x+36=0$ i $x^2-37x+36=0$. Odatle: $x=4$, $y=9$; ostali korijeni ne zadovoljavaju zadane jednadžbe.

17. $x+y+2\sqrt{x+y}=8$; $x^2+y^2=10$.
Stavi: $x+y=u^2$. $x=1$, $y=3$.

18. $\sqrt{3x+13}+\sqrt{4y+1}=7$; $x=y-1$.
Uvrsti x iz 2. jednadžbe u 1. $x=1$, $y=2$.

19. $x^2-y+\sqrt{x^2-y}=20$; $x^4-y^2=544$.
Stavi: $x^2-y=z^2$. $x_{1,2}=\pm 5$, $y_{1,2}=9$.

20. $\sqrt{x^2+2y^2}\,[\sqrt{x^2+2y^2}-xy]=3$,
$\sqrt{x^2+2y^2}\,[\sqrt{x^2+2y^2}+xy]=15$.

Stavi $x^2+2y^2=z^2$. $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 2\sqrt{2}$, $y_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

21. Ako diferenciju dvaju brojeva pomnožiš s prvim brojem, a od toga produkta oduzmeš kvadrat drugoga broja, dobit ćeš — 11. Ako dvostrukom prvom broju pribrojiš drugi broj, a dobiveni broj pomnožiš s drugim brojem i tom produktu pribrojiš kvadrat prvoga broja, dobit ćeš 25. Koji su to brojevi?
$x(x-y)-y^2=-11$; $y(2x+y)+x^2=25$. — Iz 2. jednadžbe izrazi y ($y=\pm 5-x$) i stavi u 1. jednadžbu. $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=-7$, $y_2=12$; $x_3=7$, $y_3=-12$; $x_4=-2$, $y_4=-3$.

Riješi jednadžbe:

22. $3\sqrt{2x-7}-4=11$. $\sqrt{2x-7}=5$; $x=16$.

23. $3x-\sqrt{5x^2+11}=5$.
Korijen prenesi na desnu stranu, a 5 na lijevu, pa jednadžbu kvadriraj. $2x^2-15x+7=0$ daje dva korijena, od kojih zadanoj jednadžbi zadovoljava samo $x=7$.

24. $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-5}=11$.
Premjesti jedan korijen na desnu stranu i jednadžbu kvadriraj; dobit ćeš: $x=30$.

25. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+7}=2$.
Jedan korijen prenesi na desnu stranu i jednadžbu kvadriraj. Dobivenu jednadžbu $4\sqrt{2x+7}=x+7$ opet kvadriraj, pa ćeš dobiti $x^2-18x-63=0$. Jednadžbi zadovoljava samo korijen $x=-3$.

26. $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+4}=2$.
Uputa kao kod zadatka 25. Dobit ćeš $x^2-18x-63=0$. Zadovoljava samo $x=21$.

27. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}-3=0$.
Uputa kao kod zadatka 25. Dobit ćeš $x^2-21x+54=0$, a odatle $x_1=18$, $x_2=3$.

28. $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)=x-1$.
Nakon kvadriranja uređene jednadžbe izlazi $x=49$.

29. $9+8\sqrt{x} = 64-3\sqrt{x}$. $11\sqrt{x} = 55$. $x = 25$.

30. $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3}} = \sqrt{\frac{x^2+4}{5}}$.
Kvadriranjem jednadžbe dobit ćeš : $2x^2+5x-7 = 0$. Zadanu jednadžbu zadovoljava samo $x = 1$.

31. $\sqrt{x+2} = \frac{x-1}{\sqrt{x-3}}$.
$\sqrt{(x+2)(x-3)} = x-1$. Kvadriranjem jednadžbe dobit ćeš : $x = 7$.

32. $2+\sqrt[3]{x^3-6x^2+12\sqrt{x^2-5}} = x$.
Prenesi 2 na desnu stranu i jednadžbu kubiraj, a dobivenu jednadžbu $3\sqrt{x^2-5} = 3x-2$ kvadriraj. Dobit ćeš : $x = \frac{49}{12}$.

33. $\frac{3}{2}\sqrt{x}+2\sqrt{x} = \frac{7}{\sqrt{x}}$.
Jednadžbu pomnoži s $\sqrt{x}$. $x = 2$.

34. $x^{\frac{1}{2}} - 2ax^{-\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} = 0$.
Pretvorivši potencije u korijene i pomnoživši jednadžbu s $\sqrt{x}$ dobit ćeš: $\sqrt{x(a+x)} = 2a-x$. Kvadriranjem jednadžbe dobit ćeš : $x = \frac{4a}{5}$.

35. $3\sqrt{x+30}+2\sqrt{x-15} = 5\sqrt{x+6}$.
Kvadriranjem jednadžbe dobit ćeš: $x-5 = \sqrt{(x+30)(x-15)}$, a odatle kvadriranjem $x = 19$.

36. $7\sqrt{x-8} - \sqrt{21x+12} - 2\sqrt{3} = 0$.
Priređena jednadžba $7\sqrt{x-8}-2\sqrt{3} = \sqrt{21x+12}$ prelazi kvadriranjem u : $x-14 = \sqrt{3(x-8)}$. Ponovnim kvadriranjem dobit ćeš : $x^2-31x+220 = 0$. Zadanu jednadžbu zadovoljava samo korijen $x = 20$.

37. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-4} = \sqrt{x+12}+\sqrt{x-9}$.
Nakon dvostrukoga kvadriranja jednadžbe dobit ćeš : $x = 13$.

38. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+9} = \sqrt{x-11}+\sqrt{x+22}$.
Uputa kao kod zadatka 37. $x = 27$.

39. $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-10} = \sqrt{x+3}$.
Prenesi 3. član lijeve strane na desnu i jednadžbu kvadriraj. Dobivenu jednadžbu: $\sqrt{(x-7)(x-2)} - 1 = \sqrt{(x-10)(x+3)}$ opet kvadriraj. Dobit ćeš $2\sqrt{(x-7)(x-2)} = 45-2x$, a ta kvadrirana daje : $x = \frac{1969}{144}$.

40. **Riješi jednadžbe** $\sqrt{y}-\sqrt{y-x} = \sqrt{20-x}$,
$\sqrt{y-x} : \sqrt{20-x} = 3 : 2$.
Prvu jednadžbu kvadriraj ; dobit ćeš : $y-10 = \sqrt{y(y-x)}$. U drugoj primijeni pravilo ; produkt vanjskih članova jednak je produktu nutarnjih i dobivenu jednadžbu kvadriraj. Dobit ćeš: $5x+4y = 180$. i $x^2-56x+640 = 0$. zadovoljava samo $x = 16$, $y = 25$.

§ 2. HOMOGÉNÉ JÉDNADŽBE.

Riješi jednadžbe :

41. $3y^2-x^2 = 26$; $2y^2-xy = 15$.
Načini homogenu jednadžbu bez apsolutnoga člana i stavi: $y = xu$; $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{5}{7}$; $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 7$, $y_{1,2} = \pm 3$, $y_{3,4} = \pm 5$.

42. $3xy-4y^2 = 2$; $x^2+3xy-5y^2 = 7$.
Stavi : $y = xu$. $u_1 = \frac{1}{6}$ $u_2 = \frac{2}{3}$;
$x_{1,2} = \pm\frac{6}{\sqrt{7}}$, $y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$; $x_{3,4} = \pm 3$, $y_{3,4} = \pm 2$.

43. $x^2-xy = 6$; $y^2+3xy = 10$.
Uputa kao kod zadatka 42. $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = -5$.
$x_{1,2} = \pm 3$, $y_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \mp 1$, $y_{3,4} = \pm 5$.

44. $x^2 = 13-y^2$, $8x^2 = 15xy-18$.
Načini, da na desnim stranama stoje samo apsolutni članovi ; od njih (metodom jednakih koeficijenata) načini homogenu jednadžbu bez apsolutnog člana i stavi $y = xu$; $u_1 = \frac{61}{6}$, $u_2 = \frac{2}{3}$;
$x_{1,2} = \frac{\pm 6}{17}$, $x_{3,4} = \pm 3$. $y_{1,2} = \pm\frac{61}{17}$, $y_{3,4} = \pm 2$.

45. $2x^2+3xy+10=0, \quad x^2+xy-y^2+11=0.$
Načini homogenu jednadžbu bez apsolutnoga člana i stavi y = xu. $u_1 = -\frac{4}{5}$, $u_2 = -\frac{2}{3}$, $x_{1,2} = \pm 5$, $x_{3,4} = \mp 2$, $y_{1,2} = \mp 4$, $y_{3,4} = \pm 3$.

46. $x^4+x^2y^2+y^4=21, \quad x^2+xy+y^2=7.$
Uvrsti u obadvije jednadžbe y = xu i podijeli ih međusobno. Dobit ćeš $x^2(u^2-u+1)=3$. Kad staviš y = xu u 2. zadanu jednadžbu, dobit ćeš: $x^2 = \frac{7}{u^2+u+1}$; ovo uvrsti u $x^2(u^2-u+1)=3$, pa ćeš dobiti $u_1=2$, $u_2=\frac{1}{2}$; $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 1$, $y_{3,4}=2$.

47. $x^4+x^2y^2+y^4=133, \quad x^2-xy+y^2=7.$
Stavi u zadane jednadžbe y = xu. Druga jednadžba daje $x^2(u^2-u+1)=7$, a prva podijeljena s drugom (kad se skrati s u^2-u+1): $\frac{u^2+u+1}{u^2-u+1}=\frac{19}{7}$; odatle: $u_1=\frac{3}{2}$, $u_2=\frac{2}{3}$; $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm 2$, $y_{3,4}=\pm 3$.

48. $(y+4x)(y+5x)=2(y+2x)(y+4x), \quad y^2+2xy=3.$
U prvu jednadžbu stavi y = xu; $u_1=-4$, $u_2=1$; $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$, $y_{1,2}=\mp 2$, $x_{3,4}=\pm 1$, $y_{3,4}=\pm 1$.

49. $x^2-y\sqrt{xy}=14, \quad y^2-x\sqrt{xy}=-7.$
Načini homogenu jednadžbu bez apsolutnoga člana i stavi y = xu. Dobit ćeš: $u=\frac{1}{4}$; $x=4$, $y=1$.

50. $x^2+xy-y^2=29, \quad x^2-xy+y^2=21.$
Stavi y = xu. Da odrediš *u*, podijeli jednu jednadžbu s drugom. $u_1=\frac{4}{5}$, $u_2=\frac{1}{5}$; $x_{1,2}=\pm 5$, $y_{1,2}=\pm 4$; $u_2=\frac{1}{5}$ ne zadovoljava.

51. $3x^2+2xy-y^2=0, \quad x^2+y^2+2x=12.$
U 1. jednadžbu stavi: y = xu, pa ćeš dobiti: $u^2-2u-3=0$; $u_1=3$, $u_2=-1$. Dakle: y = 3x, y = −x. To uvrsti u 2. jednadžbu. Za y = 3x izlazi:

$x_1=1$, $x_2=-\frac{6}{5}$, $y_1=3$, $y_2=-\frac{18}{5}$. Za y = −x izlazi $x_3=2$, $x_4=-3$, $y_3=-2$, $y_4=3$.

52. $3x^2-7xy+4y^2=0, \quad 5x^2-3xy-y^2=35.$
U 1. jednadžbu stavi y = xu i izračunaj *u*. Dobiveni *y* uvrsti u 2. jednadžbu. $x_{1,2}=\pm 4$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{35}$, $y_{1,2}=\pm 3$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{13}$.

53. $2x^2-2xy-y^2=39, \quad x^2+2xy+4y^2=39.$
Odbi 2. jednadžbu od prve i u dobivenu homogenu jednadžbu bez apsolutnoga člana stavi y = xu. Odatle $u_1=\frac{1}{5}$, $u_2=-1$. $x_{1,2}=\pm 5$, $x_{3,4}=\mp\sqrt{13}$, $y_{1,2}=\pm 1$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{13}$.

54. $(x-y)x=75, \quad (x+y)y=250.$
Načini homogenu jednadžbu bez apsolutnoga člana i u nju stavi y = xu. $x_{1,2}=\pm 15$, $x_{3,4}=\mp\frac{5}{\sqrt{2}}$, $y_{1,2}=\pm 10$, $y_{3,4}=\pm\frac{25}{\sqrt{2}}$.

55. $x^2+xy-y^2=-171, \quad y^2+10xy+24x^2=0.$
U 2. jednadžbu stavi y = xu. $u_1=-4$, $u_2=-6$ $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\mp 12$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{171}{41}}$, $y_{3,4}=\mp 6\cdot\sqrt{\frac{171}{41}}$

56. $4x^2-9xy+5y^2=0, \quad 7x^2-3xy=3x+2y-1.$
U 1. jednadžbu stavi y = xu. Dobit ćeš u = 1 i $u=\frac{4}{5}$. U 2. jednadžbu uvrsti jedamput y = x, a drugi put $y=\frac{4}{5}x$. Dobit ćeš $x_1=y_1=1$, $x_2=y_2=\frac{1}{4}$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}\left\{1\pm\sqrt{\frac{3}{23}}\right\}$, $y_{3,4}=\frac{2}{5}\left\{1\pm\sqrt{\frac{3}{23}}\right\}$.

57. $y^2+10xy-24x^2=0, \quad 6y^2-5xy=14.$
U 1. jednadžbu stavi y = xu. $u_1=2$, $u_2=-12$. $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\pm 2$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{66}}$, $y_{3,4}=\mp\frac{12}{\sqrt{66}}$.

58. $x^2-y^2=9, \quad (2x+y)(x+2y)=182.$
Drugu jednadžbu izmnoži, a u obadvije uvrsti y = xu. Kad zatim 2. jednadžbu podijeliš s prvom, dobit ćeš: $u_1=\frac{4}{5}$, $u_2=-\frac{41}{40}$. $x_{1,2}=5$, $x_{3,4}=\frac{\pm 40}{3}i$, $y_{1,2}=\pm 4$, $y_{3,4}=\mp\frac{41}{3}i$.

59. $x^4+x^2y^2+y^4 = 243, \quad x^2-xy+y^2 = 27.$
Uvrsti u zadane jednadžbe $y = xu$. Podijeljene daju: $x^2\frac{1+u^2+u^4}{1-u+u^2} = \frac{243}{27}$, a druga sama daje: $x^2 = \frac{27}{1-u+u^2}$. Odavle supstitucijom dolaziš do: $\frac{1+u^2+u^4}{(1-u+u^2)^2} = \frac{243}{27^2} = \frac{1}{3}$. Ako brojnik i nazivnik skratiš s u^2-u+1, dobit ćeš $\frac{u^2+u+1}{u^2-u+1} = \frac{1}{3}$ ili $u_{1,2} = -1$. $x_{1,2} = \mp 3$, $y_{1,2} = \pm 3$. — Ako rečenu jednadžbu (brojnik i nazivnik) ne skratiš, dobit ćeš simetričnu jednadžbu: $u^4+u^3+u+1 = 0$, koja daje još rješenje $u = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, a to daje: $x = \pm 3\sqrt{2}$, $y = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{6})$.

60. $y(y-x) = 2y(y+3x) + 6x^2, \quad 4x^2-y^2 = 48.$
Prvu jednadžbu izmnoži i stavi $y = xu$. $u_1 = -1, u_2 = -6$. $x_{1,2} = \pm 4$, $y_{1,2} \mp 4$, $x_{3,4} = \pm\frac{i}{2}\sqrt{6}$, $y_{3,4} = \mp 3i\sqrt{6}$.

§ 3. EKSPONENCIJALNE JEDNADŽBE.

Riješi jednadžbe:

61. $(7^x)^{x+9} = (7^2)^{5x}$. Odatle $x^2-x = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 1$.
62. $3^{x^2-13x+30} = 1$.
Stavi $1 = 3^0$. $x^2-13x+30 = 0$. $x_1 = 10$, $x_2 = 3$.
63. $1:3^{5x} = 243^{x+2}$. Slijedi $3^{-5x} = 3^{5(x+2)}$, $-5x = 5(x+2)$. $x = -1$.
64. $a^{\frac{x}{4}+\frac{x}{3}} = a^{13}.a^{\frac{x}{5}+\frac{x}{6}}$. Izlazi $\frac{x}{4}+\frac{x}{3} = 13+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}$. $x = 60$.
65. $5^{x+15}.5^{x-7} = 5^{3x}$. Izlazi $2x+8 = 3x$. $x = 8$.
66. $\frac{4^{11x}}{8^3} = 2^4$. Izlazi $2^{22x} = 2^{22}$. $x = 1$.
67. **Arhimed je rekao: „Da mihi fixum punctum et terram movebo”. Koliko bi morao uzeti u potencijalnom koloturniku pomičnih kolotura, da uzmogne dići Zemlju silom $P = 60$ kg, ako je masa Zemlje 6.10^{24} kg (Epstein)?**
Ako Q znači masu, P silu, koja drži na potencijalnom koloturniku ravnotežu, a x broj pomičnih kolotura, onda je $P = \frac{Q}{2^x}$. $x = 77$.

68. $5^{x^2-5x+10} = 625$. Stavi $5^{x^2-5x+10} = 5^4$.
Odatle: $x^2-5x+6 = 0$. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.
69. $16^{x^2} = 32 : 2^x$. Slijedi $2^{4x^2} = 2^{5-x}$; $4x^2+x-5 = 0$. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{4}$.
70. $7^{(x-5)(x+2)} = 1$. Stavi $7^{(x-5)(x+2)} = 7^0$.
Odatle: $(x-5)(x+2) = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = -2$.
71. $\sqrt[x]{13} = 13^x$. Stavi $13^{\frac{1}{x}} = 13^x$, $\frac{1}{x} = x$; $x_{1,2} = x \pm 1$.
72. $4^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$. Stavi $2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{\sqrt{x+1}+6}$.
Odatle: $\sqrt{x+1} = 6$. $x = 35$.
73. $\sqrt[x+2]{64} = 2.\sqrt[x+3]{16}$. Stavi $2^{\frac{6}{x+2}} = 2^{1+\frac{4}{x+3}}$.
Odatle: $x^2+3x-4 = 0$. $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.
74. $\sqrt[4x+1]{a^{7/2}} = a^{13}.\sqrt[20x+5]{a^{11}}$. Stavi $a^{\frac{7}{2(4x+1)}} = a^{13+\frac{11}{20x+5}}$.
Odatle $\frac{7}{2(4x+1)} = 13+\frac{11}{5(4x+1)}$. $x = -\frac{9}{40}$.
75. $5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10$.
Stavi: $\sqrt[x]{3} = y^2$; slijedi: $3y^2+5y-42 = 0$. $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{14}{3}$; $\sqrt[x]{3} = 3^2$ ili $x_1 = \frac{1}{2}$. $\sqrt[x]{3} = \frac{196}{9}$. Logaritmiranjem izlazi: $x_2 = \frac{\log 3}{\log 196 - \log 9} = 0{\cdot}3566$.
76. $\sqrt[x]{9^{3x-4}} = \sqrt[2x]{8^{5x-8}}$. Stavi $3^{\frac{2(3x-4)}{x}} = 2^{\frac{3(5x-8)}{2x}}$. Logaritmiranjem izlazi: $x = \frac{8(2\log 3-3\log 2)}{3(4\log 3-5\log 2)} = 0{\cdot}3382$.
77. $3^x-5.3^{x-2} = 4$. Izlazi $3^x(1-\frac{5}{9}) = 4$ ili $3^{x-2} = 3^0$; odatle: $x = 2$.
78. $3^{4x}-5.3^{2x} = 36$. Stavi: $3^{2x} = y$. $y = 9$, $x = 1$.
79. $(\frac{2}{3})^{x+3} + (\frac{2}{3})^{x+1} - (\frac{2}{3})^x = -\frac{4}{243}$. $(\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^2$. $x = 2$.
80. $7^{x^2+x+1} - 7^{x^2+x} = 6.7^6$. $7^{x^2+x}(7-1) = 6.7^6$.
Odatle: $x^2+x-6 = 0$. $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.
81. $3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x}$. $3^{4x}(3+1) = 2^{3x}(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2})$; $3^{4x} = 17.2^{2x-7}$. $x = \frac{\log 17 - 7\log 2}{4\log 3 - 2\log 2} = 0{\cdot}12257$.

82. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$. $2^x(1+2+4) = 3^x(1+3+9)$. $x = -\frac{\log 13 - \log 7}{\log 3 - \log 2} = -\mathit{1{\cdot}5267}.$

83. $7^{3x+2} - 4^{x+3} = 7^{3x+1} + 4^{x+2}$. Slijedi $7^{3x+1}(7-1) = 2^{2(x+2)}(1+4)$ ili $3.7^{3x+1} = 5 . 2^{2x+3}$. Odatle logaritmiranjem: $x = \frac{3\log 2 - \log 3 + \log 5 - \log 7}{3\log 7 - 2\log 2} = \mathit{0{\cdot}14475}.$

84. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 2^x + 2^{x+2} + 2^{x+4}$. $3^x(1+3+9) = 2^x(1+4+16)$; odatle: $13.3^{x-1} = 7.2^x$. Logaritmiranjem te jednadžbe izlazi: $x = \frac{\log 3 + \log 7 - \log 13}{\log 3 - \log 2} = \mathit{1{\cdot}18280}$

85. $3^{3x+1} + 4 . 3^{3x} - 2^{3x} = 2^{3x+3} + 2^{3x+2}$. $7 . 3^{3x} = 13 . 2^{3x}$; odatle: $x = \frac{1}{3}\,\frac{\log 13 - \log 7}{\log 3 - \log 2} = \mathit{0{\cdot}5089}.$

86. $3[\sqrt{2^{3x+1}} + \sqrt{2^{3x+2}}] = 2[\sqrt{3^{3x}} + \sqrt{2.3^{3x}}]$. $3.2^{\frac{3x+1}{2}}(1+2^{\frac{1}{2}}) = 2.3^{\frac{3x}{2}}(1+2^{\frac{1}{2}})$ ili $3.2^{\frac{3x+1}{2}} = 2.3^{\frac{3x}{2}}$ ili $2^{3x-1} = 3^{3x-2}$. Odatle: $x = \frac{1}{3}\,\frac{\log 9 - \log 2}{\log 3 - \log 2} = \mathit{1{\cdot}2309}.$

87. $a^{x+2y} . a^{x-y} = a^{15}$, $a^{x-2y} . a^{2x+3y} = a^{22}$. $x+2y+x-y = 15$, $x-2y+2x+3y = 22$; $x = 7$, $y = 1$.

88. $18^x : 18^y = 324.18$, $7^x . 7^y = 343.49$. $18^{x-y} = 18^3$, $7^{x+y} = 7^5$, $x-y = 3$ $x+y = 5$; $x = 4$, $y = 1$.

89. $5^x . 2^y = 207$, $x = y-1$. $5^{y-1} . 2^y = 207$. Logaritmiranjem slijedi: $y = \frac{\log 5 + \log 207}{\log 2 + \log 5} = \mathit{3{\cdot}01494}$, $x = \frac{\log 207 - \log 2}{\log 2 + \log 5} = \mathit{2{\cdot}01494}.$

90. $3^{2x+1} = 9^{y+1}$, $2^{4x+1} = 32^{y^2+1}$. $3^{2x+1} = 3^{2(y+1)}$, $2^{4x+1} = 2^{5(y^2+1)}$. $2x = 2y+1$, $4x = 5y^2+4$; $5y^2 - 4y + 2 = 0$. $y_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{6}}{5}$, $x_{1,2} = \frac{9 \pm 2i\sqrt{6}}{10}$.

91. $x^y = y^x$, $11^x = 5^y$. $y.\log x = x.\log y$, $x.\log 11 = y.\log 5$. Odatle: $x : y = \log x : \log y$ i $x : \log 5 = y : \log 11$ (ovdje su nutarnji članovi zamijenjeni!). Ako stavimo y: $\log 11 = k$, slijedi: $x = k.\log 5$, $y = k.\log 11$. Iz gornjih razmjera slijedi: $\log x : \log y = \log 5 : \log 11$. Logaritmiranjem izraza za x i y dobivamo: $\log x = \log k + \log(\log 5)$ i $\log y = \log k + \log(\log 11)$. Podijelivši te dvije jednadžbe dobivamo, kad stavimo: $\frac{\log x}{\log y} = \frac{\log 5}{\log 11}$, ovo $\frac{\log 5}{\log 11} = \frac{\log k + \log(\log 5)}{\log k + \log(\log 11)}$. Odatle: $\log k = \frac{\log(\log 5)\log 11 - \log 5 \log(\log 11)}{\log 5 - \log 11}$. $k = \frac{17435}{34242} = 0{\cdot}50916$. Prema tome: $x = \mathit{0{\cdot}50916.\ \log 5 = 0{\cdot}35589}$, $y = \mathit{0{\cdot}50916.\ \log 11 = 0{\cdot}53023}.$

92. $3.3^x - 3^y = 0$, $2^x.2^y = 128$. $3^{x+1} = 3^y$, $2^{x+y} = 2^7$. Odatle: $x-y = -1$, $x+y = 7$. $x = 3$, $y = 4$.

§ 4. LOGARITAMSKE JEDNADŽBE.

Riješi jednadžbe:

93. $\log\frac{1}{x} + 2\log x^2 - \log(2x) = 0{\cdot}30103$; $\frac{x^4}{2x^2} = 2$; $x = 2$.

94. $2\log x - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{3}\log(x^2) + \log 10 = 2{\cdot}51444$. $\frac{10x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} = 326{\cdot}92$. $x = 5$.

95. $\frac{3}{2}\log x + \log(x+1) - \log 2 - \log(x-1) - 2\log x = \frac{1}{2}\log x + \log(x-3) - \log 6 - \log x$. + log 5. $\frac{x^{3/2}(x+1)}{2(x-1)x^2} = \frac{5x^{1/2}(x-3)}{6x}$ ili $\frac{x+1}{x-1} = \frac{5(x-3)}{3}$; $x_1 = 4$, $x_2 = 0{\cdot}6$.

96. $\log(1-\frac{x}{3}) + \log(5x-1) = \log 4 + \log x + \log(1-\frac{x}{3})$. $(5x-1) = 4x(1-\frac{x}{3})$. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

97. $\log(x+3) + \log(x-3) + \log 20 - (\log 2 + 2) = 0{\cdot}20412$. $\frac{x^2-9}{10} = 1{\cdot}6$. $x = \pm 5$.

98. $\log(x-4) + \log(x-5) = \log 2$. $(x-4)(x-5) = 2$. $x_1 = 6$, $x_2 = 3$.

99. $\log x + \log 3 + \log(x-3) = 2{\cdot}32222$. $3x(x-3) = 210$. $x_1 = 10$, $x_2 = -7$.

100. $\frac{1}{2}[\log(x-7) - \log(x-19)] = \frac{1}{2}\log(x-19)$. $\frac{x-7}{x-19} = x-19$. $x_1 = 23$, $x_2 = 16$.

101. $\log(x+\frac{1}{3}) + \log(5x-8) - \log 2 = \log(3x+1) - 1$. $\frac{(x+1/3)(5x-8)}{2} = \frac{3x+1}{10}$. $x_1 = \frac{43}{25}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

102. $\log(x+11) - \log(x-5) = \log(x+11) - \log(7x-1)$.
$\frac{x+11}{x-5} = \frac{x+11}{7x-1}$ ili $(x+11)\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{7x-1}\right) = 0$.
$x_1 = -11,\ x_2 = -\frac{2}{3}$.

103. $\log x + \log(x+1) + \log(x+3) = \log\left(x+\frac{1}{3}\right) +$
$\log\left(x+\frac{7}{3}\right) + \log\left(x+\frac{1}{2}\right)$. $x(x+1)(x+3) = \left(x+\frac{1}{3}\right)$
$\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $x = \frac{-8\pm\sqrt{190}}{18}$.

104. $\log(4x-1) + \log(x+1) = \log 75$.
$(4x-1)(x+1) = 75$. $x_1 = \frac{7}{4}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$.

105. $\log(x+4) + \log(x+5) = \log 2 + \log(x+2) +$
$\log(x+4)$. $(x+4)(x+5) = 2(x+2)(x+4)$ ili
$(x+4)(1-x) = 0$. $x_1 = -4,\ x_2 = 1$.

106. $\log x + \log(x-6) = \log 7 + \log(x-6)$. $x(x-6) =$
$= 7(x-6)$ ili $(x-6)(x-7) = 0$. $x_1 = 6,\ = x_2 = 7$.

107. $\log x + \log(x+5) = 2\log 2 + \log 7 + \log 3$.
$x(x+5) = 4 \cdot 7 \cdot 3$. $x_1 = 7;\ x_2 = -12$.

108. $\log(2x+3) + \log(2x-4) = \log 2 + \log(26-x)$.
$(2x+3)(2x-4) = 2(26-x)$: $x = \pm 4$.

109. $\log x + \log(x+7) = \log 7 + \log(x+28)$.
$x(x+7) = 7(x+28)$. $x = \pm 14$.

110. $\log(x+5) + \log(x-5) - \log 5 = \log 15$.
$\frac{x^2-25}{5} = 15$. $x = \pm 10$.

111. $\frac{\log(x^3+26)}{\log(2+x)} = 3$.
$x^3+26 = (2+x)^3$; x^3 se krati! $x_1 = 1;\ x_2 = -3$.

112. $\log x \log x + 2 \cdot \log\frac{x}{2} = 3 - \log 4$. Stavi $\log x = y$.
Dobit ćeš: $y^2+2y-3 = 0$. $y = 1,\ x = 10$.

113. $(x-2)\log(27^3) = 0$. $27^{3(x-2)} = 27^0$. $x = 2$.
Ili zadanu jednadžbu krati s $\log(27^3)$.

114. $2\log(x+4) = 3\log 2 + \log x$.
$(x+4)^2 = 2^3 \cdot x$. $x = \pm 4i$.

115. $\log 4 + \log x + \log(x-1) = \log 4 + \log(2-x)$.
$x(x-1) = 2-x$. $x = \pm\sqrt{2}$.

116. $\frac{1}{2}\log(x^2-7x+10) = \log(5-x)$.
$\sqrt{x^2-7x+10} = 5-x$. To kvadriraj! $x = 5$.

117. $\frac{1}{2}\left[\log(x+4) + \log(x+11)\right] = \log(x+7)$.
$\sqrt{(x+4)(x+11)} = x+7$. $x = 5$.

118. $\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{\log 3}{2} = \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{\log 5}{2}$.
$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{5}}$ $x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{7}{2}$.

119. $2x^{2\log x} + 3 = x^{\log x} + 3x^{-\log x} + 2x^{-2\log x} = 230{\cdot}32$.
Stavi $x^{\log x} = y$. Dobit ćeš: $2y^2+3y+\frac{3}{y}+\frac{2}{y^2} = 230{\cdot}32$
ili $2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right) + 3\left(y+\frac{1}{y}\right) = 230{\cdot}32$. Stavi $y+\frac{1}{y} = u$.
Izlazi $u_1 = 10{\cdot}1$, $u_2 = -11{\cdot}6$. $y_1 = 10$, $y_2 = 10^{-1}$.
$x_1 = 10,\ x_2 = \frac{1}{10}$.

120. $(x-1)\log 4 + y\log 8 = 0$, $(x-2)\log 8 + (y+1)$
$\log 4 = \log 16$. $2^{2(x-1)+3y} = 2^0$, $2^{3(x-2)+2(y+1)} = 2^4$.—
$x = 4;\ y = -2$.

121. $\frac{1}{4}(3x-2)\log 6 + \frac{1}{3}(5y-3)\log 6 = 5 \cdot \log 6$.
$\frac{1}{3}(4x-2)\log 2 + \frac{1}{4}(3y+3)\log 2 = 5 \cdot \log 2$. Obadvije
jednadžbe pomnoži s 12! $6^{3(3x-2)+4(5y-3)} = 6^{60}$,
$2^{4(4x-2)+3(3y+3)} = 2^{60}$. $x = 2;\ y = 3$.

§ 5. JEDNADŽBE VIŠEGA STEPENA.

(Simetrične jednadžbe).

Riješi jednadžbe:

122. $x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x + 1 = 0$.
Sakupi simetrične članove i izluči zajednički faktor.
Dobit ćeš: $(x+1)\left(x^2-x+1+\frac{7}{2}x\right) = 0$, a odatle:
$x+1 = 0$ i $x^2+\frac{5}{2}x+1 = 0$. $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_3 = -2$.

123. $3x^3-4x^2+4x-3 = 0$.
Sakupi simetrične članove i izluči zajednički faktor.
$x_1 = 1,\ x_{2,3} = \frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{35})$.

124. $3x^3+4x^2+4x+3=0$.
Uputa kao kod primjera 123. $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{1}{6}(-1\pm i\sqrt{35})$.

125. $x^4+2x^3-2x-1=0$.
Uputa kao kod primjera 123. Isto tako postupaj s dobivenom jednadžbom 3. stepena. $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=-1$.

126. $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.
Podijeli jednadžbu s x^2 i uvedi novu nepoznanicu: $x+\frac{1}{x}=y$. $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=\frac{1}{3}$.

127. $x^4-5x^3-5x-1=0$.
Sakupi simetrične članove i izluči zajednički faktor x^2-1. $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{29})$.

128. $x^4-5x^3+4x^2-5x+1=0$.
Uputa kao kod primjera 126. $y=\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{17})$, $x_{1,2}=\frac{1}{4}(5+\sqrt{17}\pm\sqrt{26+10\sqrt{17}})$, $x_{3,4}=\frac{1}{4}(5-\sqrt{17}\pm\sqrt{26-10\sqrt{17}})$.

129. $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$.
Uputa kao kod primjera 126.
$x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

130. $3x^4+2x^3-2x-3=0$.
Uputa kao kod primjera 123. S dobivenom jednadžbom 3. stepena postupaj isto tako. $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\frac{1}{3}(-1\pm 2i\sqrt{2})$.

131. $x^4-4\frac{1}{3}x^3+5\frac{1}{3}x^2-4\frac{1}{3}x+1=0$.
Uputa kao kod primjera 126.
$x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

132. $x^5-4\frac{13}{21}x^4+4x^3+4x^2-4\frac{13}{21}x+1=0$.
Uputa kao kod primjera 123. Dobivenu jednadžbu 4. stepena podijeli s x^2. $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_{4,5}=\frac{1}{7}(8\pm\sqrt{15})$.

133. $x^5+3x^4+2\frac{3}{4}x^3+2\frac{3}{4}x^2+3x+1=0$.
Uputa kao kod primjera 123. $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{1}{2}$, $x_{4,5}=\frac{1}{4}(1\pm i\sqrt{15})$.

134. $x^5-8x^4+6x^3-6x^2+8x-1=0$.
Sakupi simetrične članove i izluči zajednički faktor $x-1$. U dobivenoj jednadžbi 4. stepena: $x^4-7x^3-x^2-7x+1=0$ uvedi nakon dijeljenja s x^2 novu nepoznanicu: $y=x+\frac{1}{x}$. $y=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{61})$. $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{1}{4}\left[7+\sqrt{61}\pm\sqrt{94+14\sqrt{61}}\right]$, $x_{4,5}=\frac{1}{4}\left[7-\sqrt{61}\pm\sqrt{94-14\sqrt{61}}\right]$.

135. $x^6-2x^5+x^4-x^2+2x-1=0$.
Sakupi simetrične članove i izluči zajednički faktor (x^2-1). Dobivenu jednadžbu $(x^2-x+1)(x^2+x+1)-2x(x^2+1)+x^2=0$ ili $x^4-2x^3+2x^2+1=0$ podijeli s x^2 i uvedi novu nepoznanicu $y=x+\frac{1}{x}$.
$x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm i$, $x_{5,6}=1$.

136. $x^6-35x^3+216=0$.
Stavi $x^3=y$. $y_1=27$, $y_2=8$. Time dolaziš do jednadžbi: $x^3-27=0$ i $x^3-8=0$. Kad ove binome rastaviš u faktore, dobit ćeš: $x_1=3$, $x_{2,3}=\frac{3}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, $x_4=2$, $x_{5,6}=-1\pm i\sqrt{3}$.

137. $x^7+4x^6+2x^5+5x^4+5x^3+2x^2+4x+1=0$.
Upute kao kod primjera 123. Dobivenu jednadžbu 6. stepena podijeli s x^2 i uvedi novu nepoznanicu $x+\frac{1}{x}=y$, i dosljedno $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$. $x_1=-1$, $x_{2,3}=\pm i$, $x_{4,5}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, $x_{6,7}=-2\pm\sqrt{3}$.

§ 6. NEODREĐENE JEDNADŽBE.

138. Nađi nekoliko rješenja u cijelim brojevima jednadžbe $15x+13y=55$.
$x=\frac{55-13y}{15}=3+\frac{10-13y}{15}$; $10-13y=15u_1$, $y=-u_1+2\frac{5-u_1}{13}$, $5-u_1=13u$; $u_1=5-13u_2$ $y=15u_2-5$, $x=8-13u_2$.

u	0	1	2
x	8	−5	−18
y	−5	10	25

itd.

139. Riješi u pozitivnim cijelim brojevima jednadžbu $17x - 7y = 11$.

$y = 2x - 1 + \frac{3x-4}{7}$, $3x - 4 = 7u_1$, $x = \frac{7u_1+4}{3} = 2u_1 + 1 +$ $+ \frac{u_1+1}{3}$, $u_1 + 1 = 3u$, $u_1 = 3u - 1$, $x = 7u - 1$, $y = 17u - 4$.

u	1	2	3
x	6	13	20
y	13	30	47

itd.

140. Isto za jednadžbu $5x - 7y = 9$.

$x = \frac{9+7y}{5} = 1 + y + 2\frac{2+y}{5}$; $2 + y = 5u$, $x = 7u - 1$, $y = 5u - 2$.

u	1	2	3
x	6	13	20
y	3	8	13

itd.

141. Da li koja točka s cjelobrojnim pozitivnim koordinatama leži na pravcu $5x + 7y = 12$?

$x = 2 - y + 2\frac{1-y}{5}$, $1 - y = 5u$; $y = 1 - 5u$, $x = 7u + 1$. Odavle za $u = 0$: A(1, 1).

142. Isto za pravac $3x + 7y = 24$.

$x = 8 - 2y - \frac{y}{3}$; $y = 3u$, $x = 8 - 7u$. Odatle za $u = 1$: A(1, 3)

143. Isto za pravac $x + 2y = 13$.

Postupak kao u prijašnjem zadatku. A(11,1), B(9, 2), C(7,3), D(5, 4), E(3, 5), F(1, 6).

144. Isto za pravac $x + 3y = 14$.

$x = 14 - 3y$. Kako se vidi, y može poprimiti vrijednosti od 1 do 4. Točke su A(11, 1), B(8, 2), C(5, 3), D(2, 4).

145. Nađi dva pozitivna broja, od kojih je jedan djeljiv s 11, drugi s 13, a suma im je s 109.

$11x + 13y = 109$; $x = 9 - y + 2\frac{5-y}{11}$, $5 - y = 11u$. $y = 5 - 11u$, $x = 4 + 13u$. Za $u = 0$ slijedi $x = 4$, $y = 5$.

146. Ako pribrojiš 11-struki neki broj 17-strukom drugom broju, dobit ćeš 123. Koji su to pozitivni brojevi?

$11x + 17y = 123$, $x = 5 + 13u$, $y = 4 - 7u$; $-\frac{5}{13} < u < \frac{4}{7}$. Za $u = o$ slijedi $x = 5$, $y = 4$.

147. Rastavi 99 u dva dijela, od kojih je jedan djeljiv s 7, a drugi s 8.

$7x + 8y = 99$; $x = 14 - y + \frac{1-y}{7}$. Jer x mora biti cio broj, stavi $y = 1$ (da nestane razlomka). Odatle $x = 13$. To su specijalna rješenja. Općeno ćeš dobiti prema formuli $x = \alpha - bu$, $y = \beta + au$, gdje α i β znače specijalna rješenja (ovdje 13 i 1), a a i b koeficijente ispred x i y u zadanoj jednadžbi. Prema tome je $x = 13 - 8u$, $y = 1 + 7u$. Tu može u poprimiti vrijednosti 0 i 1. Za $u = 1$ dobit ćeš $x = 5$, $y = 8$.

148. Rastavi 123 u dva dijela, od kojih je jedan djeljiv s 7, a drugi s 11.

$7x + 11y = 123$; $x = 17 - y + 4\frac{1-y}{7}$. Daljni postupak kao u prijašnjem zadatku. $\alpha = 16$, $\beta = 1$, $x = 16 - 11u$, $y = 1 + 7u$. u može poprimiti samo vrijednost 1. Dobit ćeš $x = 5$, $y = 8$.

149. Nađi takva dva pozitivna broja, da 5-struki drugi broj odbijen od 9-strukoga prvog broja daje diferenciju 3.

$9x - 5y = 3$, $y = x + \frac{4x-3}{5} = x + u_1$, itd. $x = 5u - 3$, $y = 9u - 6$.

u	1	2	3
x	2	7	12
y	3	12	21

itd.

150. Rastavi $\frac{85}{273}$ u diferenciju dvaju razlomaka, od kojih ima prvi nazivnik 13, a drugi 21.

$\frac{x}{13} - \frac{y}{21} = \frac{85}{273}$ ili $21x - 13y = 85$; $x = 4 + \frac{13y+1}{21} = 4 + u_1$, itd. $x = 13u + 9$, $y = 21u + 8$.

u	0	1	2
x	9	22	35
y	8	29	50

itd.

151. Rastavi 300 u dva broja, od kojih prvi podijeljen s 3 daje ostatak 1, a drugi podijeljen s 11 daje ostatak 6.

Traženi su brojevi $3x+1$ i $11y+6$. Dakle: $3x+1+$ $+11y+6=300$ ili $3x+11y=293$. $x=97-3y+2\frac{1-y}{3}$. $\alpha=94$, $\beta=1$, $x=94-11u$, $y=1+3u$, gdje u poprima vrijednosti od 0 do 8.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	94	83	72	61	50	39	28	17	6
y	1	4	7	10	13	16	19	22	25

152. Odredi dva broja manja od 400, koji podijeljeni s 2 i 3 daju ostatak 3, a podijeljeni sa 5 i 7 nemaju ostatka.

$6x+3=35y$; $x=\frac{35y-3}{6}=5y+\frac{5y-3}{6}$, $5y-3=6u_1$; $y=u_1+\frac{u_1+3}{5}$, $u_1+3=5u$, $u_1=5u-3$; $y=6u-3$, $x=35u-18$.

Granice ćeš naći ovako: $35(6u-3)<400$ ili krateći $42u<101<102$, $7u<17<21$, $u<3$ t. j. u može poprimiti vrijednosti 1 i 2. Dakle:

u	1	2
x	17	52
y	3	9

Brojevi su 105 i 315.

153. Seljak je utržio za kupus i salatu zajedno 43 Din. Ako je prodavao glavicu kupusa po 7 Din, a glavicu salate po 3 Din, koliko je prodao glavica kupusa, a koliko salate?

$7x+3y=43$, $y=14-2x+\frac{1-x}{3}$; $1-x=3u$, $x=1-3u$, $y=12+7u$. u može poprimiti vrijednosti -1 i 0.

u	−1	0
x	4	1
y	5	12

t. j. seljak je prodao ili 4 glavice kupusa i 5 glavica salate ili 1 glavicu kupusa i 12 glavica salate.

154. Dvije su seljakinje donijele na trg ukupno 225 jabuka, a svaka je imala preko 100 jabuka. Jedna kaže: „Ako vadim iz košare svakiput po 5 jabuka, ostat će u košari još 3 jabuke". Druga kaže: „Ako vadim svakiput po 4 jabuke, ostat će u košari još 2 jabuke". Koliko je jabuka imala svaka?

Broj jabuka prve seljakinje jest $5x+3$, a broj jabuka druge $4y+2$. Dakle $5x+4y=220$. $y=55-x-\frac{x}{4}$. Stavi $x=4$ (da nestane razlomka). Slijedi $y=50$. Općena su rješenja $x=4-4u$, $y=50+5u$. Iz $5(4-4u)+3>100$ i $20(10+u)+2>100$ slijedi $-3>u>-6$; t. j. u može poprimiti vrijednosti -4 i -5.

u	−4	−5
x	20	24
y	30	25

t. j. moguća su dva slučaja: a) *103* i *122*, b) *123* i *102*.

155. A želi kupiti od B-a 51 *l* vina, a nemaju pri ruci nikakve mjere osim posude od 10 *l* i posude od 3 *l*. Kako će B izmjeriti A-u kupljeno vino?

$10x+3y=51$, $y=17-3x-\frac{x}{3}$. Stavi $x=3$. Slijedi $y=7$. Općena su rješenja $x=3-3u$, $y=7+10u$, gdje u mora biti jednak 0. A je dakle napunio veću posudu 3 put, a manju 7 put.

156. Otac muževne dobe zapitan, koliko je godina njegovu sinu odgovori: „Ako broju mojih godina, koje podijeljene s 4 daju ostatak 2, dodaš 5-struki broj godina moga sina, dobit ćeš 122". Koliko je godina ocu, a koliko sinu?

$4x+2+5y=122$; $x=30-y-\frac{y}{4}$. Stavi $y=4$. Slijedi $x=25$. Općena su rješenja $x=25-5u$, $y=4+4u$.

u	1	2	3	4
x	20	15	10	5
y	16	12	16	24
otac	82	62	42	22
sin	16	12	16	24

Iz ove se skrižaljke razabira, da je moguće samo jedno rješenje (po naravi zadatka): $u=3$, $x=42$, $y=16$.

157. U društvu, u kojem je bilo članova više od 20, a manje od 30, platio je svaki muškarac 5 Din, a svaka ženska 8 Din. Koliko je bilo muških, a koliko ženskih, ako su zajedno platili 180 Din?

$5x+8y=180$, $x=36-y-\frac{3y}{5}$. Jer je x cio broj, mora biti y u razlomku $\frac{3y}{5}$ djeljiv s 5, a ne može biti jed-

nak 0, jer zadatak tvrdi, da ženskih u društvu ima. Stavi dakle $y=5$. Odatle $x=36-5-3=28$. Općena su rješenja $x=28-8u$, $y=5+5u$.

u	2	3
x	12	4
y	15	20

Muškaraca je bilo 12 ili 4, a ženskih 15 ili 20.

158. Neki se kemijski proces zbiva po jednadžbi $x \,.\, As_2S_3 + y \,.\, K_2S = z \,.\, K_3AsS_3$. Odredi najmanje cjelobrojne pozitivne vrijednosti od x,y,z, da ova jednadžba postoji. 5x atoma i 3y atoma daju nakon kemijskoga procesa 7z atoma nastaloga spoja. Broj atoma na lijevoj strani jednadžbe mora biti jednak broju atoma na desnoj strani jednadžbe. Dakle: $5x+3y=7z$. Na lijevoj strani ima 2 . y atoma elementa K, a na desnoj ih ima 3. z. Jer ti brojevi moraju biti jednaki, mora biti $y=3$, $z=2$. Jednadžba se pojednostavnjuje u jednadžbu $5x=5$, $x=1$. — Kem. formula jest: $As_2S_3+3K_2S=2K_3AsS_3$.

159. Isto za: $x \,.\, P_2O_5 + y.H_2O = z.HPO_3$. $7x+3y=5z$. S istoga razloga kao u prijašnjem primjeru mora biti $z=2$ (poradi P). Dakle $7x+3y=10$, $y=3-2x+\frac{1-x}{3}$. $x=1$, $y=1$. — Kemijska formula jest: $P_2O_5+H_2O=2HPO_3$.

160. Isto za: $x \,.\, Na_2HPO_4 - y.H_2O = z.Na_4P_2O_7$. $8x-3y=13z$. Iz broja atoma x. $Na_2 = z \,.\, Na_4$ slijedi $x=2$, $z=1$. Supstitucijom u jednadžbu dobit ćeš $y=1$. — Kem. formula jest: $2Na_2POH_4 - H_2O = Na_4P_2O_7$.

161. Isto za: $x \,.\, Cl_2O + y \,.\, H_2O = z \,.\, ClOH$. $3x+3y=3z$ ili $x+y=z$. Ako je $x=1$, mora biti $z=2$ (poradi $x \,.\, Cl_2 = z \,.\, Cl$). $y=1$. Kem. formula jest: $Cl_2O+H_2O=2ClOH$.

162. Isto za: $x \,.\, NaJ + y \,.\, Cl_2 = u \,.\, J_2 + v \,.\, NaCl$. $2x+2y=2u+2v$ ili $x+y=u+v$. Iz $x \,.\, Na = v \,.\, Na$ slijedi $v=x$; iz $x.Na = u. J_2$ slijedi $x=2$, $u=1$. Prema tome: $y=1$. — Kem. formula glasi: $2NaJ+Cl_2=J_2+2NaCl$.

163. Isto za: $x.Zn_3As_2 + y.H_2SO_4 = u.AsH_3 + v.ZnSO_4$. Elementa Zn ima na lijevoj strani najmanje 3 atoma. Toliko ih mora biti i na desnoj strani. Ako je dakle $x=1$, onda je $v=3$. U tom slučaju ima elementa As na lijevoj strani 2 atoma, pa ih toliko mora biti i na desnoj strani t. j. mora biti $u=2$. Iz $5x+7y=4u+6v$ slijedi dakle $y=3$. Kem. formula jest: $Zn_3As_2+3H_2SO_4=2AsH_3+3ZnSO_4$.

164. Isto za: $x \,.\, FeS_2 + y \,.\, O = u.Fe_2O_3 + v \,.\, SO_2$. Iz $x \,.\, Fe = u \,.\, Fe_2$ slijedi za $u=1$ $x=2$ i $v=4$ (iz $2 \,.\, S_2 = v \,.\, S$). Iz $3x+y=5u+3v$ slijedi $y=11$. — Kem. formula jest: $2FeS_2+11 \,.\, O = Fe_2O_3+4SO_2$.

165. Isto za: $x \,.\, CaC_2 + y \,.\, H_2O = u \,.\, Ca(OH)_2 + v.C_2H_2$ **(proces u acetilenskoj lampi!)** Analognim razmatranjem kao u prijašnjim zadacima doći ćeš do rezultata: ako je $x=1$, onda je $v=1$, $y=2u$. Iz $3x+3y=5u+4v$ slijedi dakle: $u=1$, $y=2$. Kem. formula jest: $CaC_2+2H_2O=Ca(OH)_2+C_2H_2$.

166. Riješi jednadžbe u pozitivnim cijelim brojevima: $15x+8y+3z=102$, $20x-7y+9z=113$. Metodom jednakih koeficijenata eliminiraj z. Dobit ćeš: $25x+31y=193$. Riješivši tu neodređenu jednadžbu dobit ćeš $y=3-25u$, $x=31u+4$. Kad to dvoje uvrstiš u prvu zadanu jednadžbu, dobit ćeš: $3z=18-265u$. Kad riješiš ovu neodređenu jednadžbu, dobit ćeš: $u=3v$, $x=4+93v$, $y=3-75v$, $z=6-265v$. Da korijeni zadanih jednadžbi budu pozitivni, mora biti $v=0$. Odatle pak slijedi: $x=4$, $y=3$, $z=6$.

167. Isto za: $4x+9y-3z=45$, $8x-9y+4z=32$. Zbrojivši jednadžbe dobit ćeš $12x+z=77$, $z=77-12x$. Uvrstivši ovo u drugu jednadžbu dobit ćeš $40x+9y=276$. Kad riješiš ovu neodređenu jednadžbu, dobit ćeš $x=9u-3$, $y=44-40u$. Ove vrijednosti uvrsti u prvu zadanu jednadžbu. Dobit ćeš $z=113-108u$. Ovdje može u poprimiti samo vrijednost 1. Prema tome su korijeni jednadžbi $x=6$, $y=4$, $z=5$.

§ 7. DIFERENCIJALNI RAČUN.

Deriviraj funkcije :

168. $y = 3x^2 - 2x + 1$. — $y' = 6x - 2$.

169. $y = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$. — $y' = 6x^2 - 6x + 1$.

170. $y = x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}x^{-2}$. $y' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{8x\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{3x^3}$.

171. $y = \frac{x^n}{a} + b$. $y' = \frac{n}{a}x^{n-1}$.

172. $y = \frac{1}{m}x^m - p\,x^{p-1} + q$; $y' = x^{m-1} - p\,(p - 1)x^{p-2}$.

173. $y = \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x-1}$; $y' = \frac{1}{5\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{(x-1)^2}$.

174. $y = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{1\frac{3}{4}} + 9x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{7}x^{-3\frac{1}{2}} + 7.5^{-\frac{3}{2}}$.

$y' = 7x^{\frac{4}{3}} - 7x^{\frac{3}{4}} + 6x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-4\frac{1}{2}}$.

175. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$.

$y' = x^2(1 - 6x + 13x^2 - 12x^3 + 4x^4)$.

176. $y = 9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11} - ax^{-m}$.

$y' = 63x^6 - 15x^{-6} + 33x^{-12} + amx^{-(m+1)}$.

177. $y = 2(3x^3 - x + 4)(2x^2 - x + 1)$.

Radi po pravilu $y' = u'v + uv'$;

$y' = 2(9x^2 - 1)(2x^2 - x + 1) + 2(3x^3 - x + 4)(4x - 1)$.

178. $y = \frac{2x^2 + x + 3}{4x - 1}$. Primijeni pravilo: $y = \frac{u}{v}$,

$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $y' = \frac{8x^2 - 4x - 13}{(4x - 1)^2}$.

179. $y = \sqrt{x} + (x - 1)^2$. $y' = \frac{x + 1}{2x\sqrt{x}} + 2(x - 1)$.

180. $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x^2}$.

$y' = 12x^2 - 6x + 2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

181. $y = \frac{1}{2}x^4 + \sqrt{2x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

$y' = 2x^3 + \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} + \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

182. $y = (3x - 2)(2x + 4) + \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} + \sqrt{2x^2 - x + 2}$.

$y' = 12x + 11 + \frac{4^x - 1}{2\sqrt{2x^2 - x + 2}}$.

183. $y = 3(ax + b)(bx^2 - a) - \frac{4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$.

$y' = 3(3abx^2 + 2b^2x^2 - a^2) - \frac{4x^4 - 15x^2 + 3x - 3}{(x^2 - 1)^2}$.

184. $y = a(3x + 2x^2)^3$. $y' = 3ax^2(3 + 4x)(3 + 2x)^2$.

185. $y = (a + bx)^m$. Deriviraj po pravilu $y' = f'_u(u) . u'$;
$y' = mb(a + bx)^{m-1}$.

186. $y = a(2b - cx)^n$. Primijeni pravilo $y' = f'_u(u) . u'$;
$y' = -acn(2b - cx)^{n-1}$.

187. $y = 4\left(6 - \frac{x}{3}\right)^6$. $y' = -8\left(6 - \frac{x}{3}\right)^5$.

188. $y = [a + bx + cx^2 + ex^3]^m$. Deriviraj po pravilu o funkcijama od funkcija: $y' = f'_u(u) . u'$.
$y' = m(b + 2cx + 3ex^2)(a + bx + cx^2 + ex^3)^{m-1}$.

189. $y = \sqrt{4x - x^2}$. Deriviraj po pravilu $y = \sqrt{f(x)}$,
$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; $y' = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$.

190. $y = (2x + 1)\sqrt[3]{2x^2 + 5}$. Pretvori prije korijen u potenciju, t. j. $y = (2x + 1)(2x^2 + 5)^{\frac{1}{3}}$.
$y' = 2\sqrt[3]{2x^2 + 5} + \frac{4x(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(2x^2 + 5)^2}}$.

191. $y = \operatorname{tg} x$.
$y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Deriviraj po pravilu: $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

192. $y = \operatorname{cotg} x$.
$y = \frac{\cos x}{\sin x}$. Po pravilu $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

193. $y = \sec x$. $y = \frac{1}{\cos x}$. Po pravilu $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ dobit ćeš:
$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$.

194. $y = \operatorname{cosec} x$. $y = \frac{1}{\sin x}$. Po pravilu $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ dobit ćeš: $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}$.

195. $y^2 - 8x = 0$. Implicitna se funkcija derivira po pravilu : $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = \frac{4}{y}$.

196. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = \frac{4x}{9y}$.

197. $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$. $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = -\frac{9x}{16y}$.

198. $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 - 16 = 0$. $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = \frac{x - y}{6 - y}$.

199. $x^2 + y^2 - 36 = 0$. $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = -\frac{x}{y}$.

200. $3x^2+4y^2+6x-8y+3=0.$ $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = \frac{3(1+x)}{4(1-y)}$.

201. $x^3+y^3+2x+2y=0.$ $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = -\frac{3x^2+2}{3y^2+2}$.

202. $x^2+2xy+y^2+x-y+1=0.$ $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = -\frac{2x+2y+1}{2x+2y-1}$.

203. $(y-2)^2-6(x+3)^2=0.$ $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = \frac{6(x+3)}{y-2}$.

204. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}-1=0.$ $y' = -\frac{f'x}{f'y}$ $y' = -\frac{4}{9}\cdot\frac{3+x}{4-y}$.

205. $(x^2+y^2-bx)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$

$y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y' = \frac{1}{y}\cdot\frac{a^2x-(x^2+y^2-bx)(2x-b)}{2(x^2+y^2-bx)-a^2}$.

206. $(x+y)^{\frac{3}{2}}+(x-y)^{\frac{3}{2}}-a=0.$

Kad dobivenu derivaciju ($y' = -\frac{f'x}{f'y}$) racionaliziraš, dobit ćeš: $y' = -\frac{1}{y}(x+\sqrt{x^2-y^2})$.

207. $4y^3-3y+\sin x=0.$ $y' = \frac{1}{3}\frac{\cos x}{1-4y^2}$.

208. $(2x+y)^2+\sin(2x-y)=0.$

$y' = -\frac{4(2x-y)+2\cos(2x-y)}{-2(2x-y)-\cos(2x-y)} = 2.$

209. $\sin y-\cos 2x=0.$ $y' = -\frac{2\sin 2x}{\cos y}$ ili — ako se $\cos y$ izrazi pomoću zadane funkcije — možeš pisati

$y' = -2\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\cos^2 2x}}$.

210. $\sin^2 x-\cos^2 y+2\sin x-\cos(x+y)=0.$

$y' = -\frac{\sin(x+y)+2\cos x(\sin x+1)}{\sin(x+y)\sin 2y}$.

§ 8. RASTENJE I PADANJE FUNKCIJA I NJIHOVE EKSTREMNE VRIJEDNOSTI.

211. **Da li funkcija $y=x^2-4x-3$ na mjestima $x=0$, $x=3$ raste ili pada?**

$y'=2x-4$. U okolišu točke $x=0$ pada, jer je za $x=-1$ i za $x=+1$ $y'<0$. U okolišu točke $x=3$ funkcija raste, jer je za $x=2{\cdot}5$ i $x=3{\cdot}5$ $y'>0$.

212. **Ispitaj, da li funkcija $y=-x^2+x-1$ na mjestima $x=3$, $x=-8$ raste ili pada.**

$y'=-2x+1$. U okolišu $x=3$ funkcija pada, jer je za $x=2$ i za $x=4$ $y'<0$. U okolišu $x=-8$ raste, jer je za $x=-9$ i za $x=-7$ $y' = >0$.

213. **Da li funkcija $y=x^3+2x^2-x+1$ na mjestima $x=3$ i $x=-3$ raste ili pada?**

$y'=3x^2+4x-1$; na tim mjestima raste, jer je za $x=2$ i $x=4$ kao i za $x=-4$, $x=-2$ $y'>0$.

214. **Ispitaj, da li funkcija $y=(x-5)^2+3$ na mjestima $x=3$, $x=-2$ raste ili pada.**

$y'=2(x-5)$. Funkcija u obadva slučaja pada, jer je za $x=2$ i $x=4$ kao i za $x=-3$ i $x=-1$ $y'<0$ i takva ostaje, kad x raste.

215. **Ispitaj, da li funkcija $y=3(x-2)^3$ na mjestima $x=0$, $x=4$ raste ili pada.**

$y'=9(x-2)^2$. Funkcija u obadva slučaja raste, jer na tim mjestima derivacija ostaje pozitivna, kad x raste.

216. **Nađi maksimum funkcije: $y=ax-x^2$.**

Uvjet je za ekstremne vrijednosti funkcije $y'=0$. Deriviraj dakle zadanu funkciju i dobiveni izraz izjednači nuli. Odatle ćeš dobiti $x=\frac{a}{2}$. Maksimum leži na mjestu $x=\frac{a}{2}$. To uvrsti u $y=ax-x^2$, pa ćeš dobiti, kolik je maksimum. $y_{max}=\frac{a}{4}$. Da je to doista maksimum razabiraš odatle, što je derivacija na mjestu $\frac{a}{2}-\varepsilon$ pozitivna, a na mjestu $\frac{a}{2}+\varepsilon$ negativna.

217. **Odredi ekstremne vrijednosti funkcije $y=x\sqrt{9-x^2}$.**

$y'=0$, t. j. $\sqrt{9-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x-9^2}}=0$. Za $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ je $y_{max}=\frac{9}{2}$; za $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ je $y_{min.}=-\frac{9}{2}$.

218. **Nađi ekstremne vrijednosti funkcije: $y=2x^3+x^2-4x+3$.**

Iz $y'=0$ slijedi $3x^2+x-2=0$; $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-1$. Za $x=\frac{2}{3}$ slijedi $y_{min.}=\frac{37}{27}$; za $x=-1$ slijedi $y_{max}=6$.

219. **Odredi ekstremnu vrijednost funkcije: $y=x-a+\frac{1}{x-a}$. Gdje je minimum, a gdje maximum?**

Za $x=a+1$ $y_{min.}=-2$; za $x=a-1$ $y_{max.}=+2$.

220. **Nađi ekstremne vrijednosti funkcije : $y = x(a-x)^2$.**
$y' = 3x^2-4ax+a^2$. Iz $y' = 0$ slijedi: $y_{max.} = \frac{4a^3}{27}$ *za* $x = \frac{a}{3}$; $y_{min.} = 0$ *za* $x = a$.

221. **Nađi ekstremne vrijednosti funkcije : $y = (x-1).(2-x)^2$.**
$y' = (2-x)^2-2(x-1)(2-x)$. Iz $y' = 0$ slijedi: $y_{min.} = 0$ *za* $x = 2$; $y_{max.} = \frac{4}{27}$ *za* $x = \frac{4}{3}$.

222. **Nađi ekstremnu vrijednost funkcije : $y = 2x + +3\sqrt[3]{(a-x)^2}$.**
$y = 2x+3(a-x)^{\frac{2}{3}}$; $y' = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{a-x}}\right)$. Iz $y' = 0$ slijedi : $y_{max.} = 2a + 1$ *za* $x = a-1$.

223. **Nađi ekstremne vrijednosti funkcije : $y = m + +\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax-x^2)^4}$.**
$y = m+\frac{3}{2}(2ax-x^2)^{\frac{4}{3}}$, $y' = 4(a-x)\sqrt[3]{2ax-x^2}$. Iz $y' = 0$ slijedi: $y_{min.} = m$ *za* $x = 0$; $y_{max.} = m+\frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{a^2}$ *za* $x = a$; $y_{min.} = m$ *za* $x = 2a$.

224. **Odredi ekstremnu vrijednost funkcije: $z = \sqrt{y^2-x^2}$, $y = \frac{2}{3}(x-1)$.**
Uvrsti u z vrijednost od y i stavi $z' = 0$. Za $z = -\frac{4}{5}$ $z_{max.} = \sqrt{\frac{7}{15}}$.

225. **Rastavi broj *a* u takva dva sumanda, da bude njihov produkt maksimum.**
Neka je prvi sumand x; drugi je a—x. Dakle: $y = x(a-x)$. Iz $y' = 0$ slijedi: $y_{max.} = \frac{a^2}{4}$ za $x = \frac{a}{2}$.

226. **Broj 20 rastavi u dva sumanda, kojih produkt daje maksimum.**
x i *20— x*; $y = x(20-x)$. Iz $y' = 0$ slijedi $y_{max.} = 100$ za $x = 10$.

227. **Razdijeli dužinu *a* u dva dijela tako, da ima pravokutnik sastavljen iz tih dijelova maksimum površine.**

Jedan dio dužine *a* neka je x; drugi je dio onda : a—x. Površina y pravokutnika jest: $y = x(a-x)$. Toj funkciji traži maksimalnu vrijednost. Dobit ćeš je iz uvjeta $y' = 0$. Slijedi: $y_{max.} = \frac{a^2}{4}$ *za* $x = \frac{a}{2}$.

228. **Nad dijametrom *2r* kruga podigni pravokutni trokut najveće ploštine P.**
Stranice su x, z, 2r. $P = \frac{x}{2}z$; $z = \sqrt{4r^2-x^2}$. Iz $P' = 0$ slijedi : $x = z = \sqrt{2}.r$; $P_{max} = r^2$ (pravokutan istokračan trokut).

229. **Iz dviju stranica *a, b* neka se načini trokut najveće ploštine.**
$P = \frac{ab}{2}\sin\gamma$. *a* i *b* su zadane veličine; prama tom veličina ploštine zavisi samo o kutu γ. *P* će imati najveću vrijednost, kad ima najveću vrijednost $\sin\gamma$, a ta je 1 (ako je naime $\gamma = 90^0$). $P_{max} = \frac{ab}{2}$ *za* $\gamma = 90^0$.

230. **Nad dijametrom 2r kruga podigni pravokutan trokut najvećega opsega y.**
Stranice označi s x, z, 2r. $y = 2r+x+\sqrt{4r^2-x^2}$.
Iz $y' = 0$ slijedi : $x = z = \sqrt{2}.r$; $y_{max} = 2(1+\sqrt{2}).r$.

231. **Od svih trokuta, koji imaju istu bazu *g* i isti opseg *2s*, nađi trokut najveće ploštine.**
Jednu stranicu označi s x, pa slijedi : $x = \frac{2s-g}{2}$.
Traženi je trokut istokračan.

232. **Dužinu od 20 cm rastavi u dva dijela i od njih načini pravokutnik najveće ploštine y.**
Jedan dio dužine (x) ima biti baza, a drugi (20—x) visina. $y = x(20-x)$. Iz $y' = 0$ dobit ćeš $x = 10$, $y_{max.} = 100$.

233. **Od letve duge 4 m ima se načiniti pravokutnik najveće ploštine.**
Jer moraju biti po dvije stranice jednake, mora se letva raspoloviti, a svaka polovica razdijeliti u dijelove x i 2—x. Ploština je $y = x(2-x)$. Iz $y' = 0$ slijedi $x = 1$. Dobit ćeš kvadrat stranice 1 m.

234. **U kuglu polumjera r upiši pravokutni paralelepiped, kojemu je baza pravokutnik stranice a.**
Taj paralelepiped shvati kao paralelepiped najvećega voluma, jer je samo jedan moguć. Visina pravokutnika baze neka je x, a udaljenost baze od središta kruga z. Dobit ćeš $x=\frac{1}{2}\sqrt{8r^2-2a^2}=\sqrt{2r^2-\frac{a^2}{8}}$, $z=\sqrt{\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{8}}$, $V_{max}=a(2r^2-\frac{a^2}{2})$.

235. **Od svih kružnih isječaka opsega $2s$ nađi isječak najveće ploštine.**
Polumjer označi s x, a luk s l. $y=\frac{lx}{2}$ (ploština); $2s=2x+l$; dakle $y=x(s-x)$. Iz uvjeta $y'=0$ dobit ćeš $x=\frac{s}{2}$, $l=s$, $y_{max}=\frac{s^2}{4}$, $a=\frac{360^\circ}{\pi}=114^\circ\ 35'\ 30''$.

236. **Koji kružni isječak ima uz zadanu ploštinu P najmanji opseg y?**
Označi polumjer s x, a luk s l. Jer je $P=\frac{l}{2}x$, slijedi $l=\frac{2P}{x}$, $y=2x+\frac{2P}{x}$. $x=\sqrt{P}$,
$y_{min.}=2\sqrt{P}+\frac{2P}{\sqrt{P}}=4\sqrt{P}$.

237. **Dužinu od 24 cm rastavi u 3 dijela, od kojih je prvi dio dug 6 cm i načini pravokutni paralelepiped najvećega voluma.**
Drugi dio neka je x, a treći je 18—x. Volum je $V=6x(18-x)$. $V'=0$ daje: $x=9$; $V_{max.}=486\ cm^3$.

238. **Nađi pravokutni paralelepiped najvećega voluma, ako je baza paralelepipeda kvadrat upisan u kuglu polumjera r.**
Stranica kvadrata neka je x, a udaljenost baze od središta kugle z. $z=r\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x=\frac{2r}{\sqrt{3}}$, $V_{max.}=\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot r^3$.
Traženi je paralelepiped kocka.

239. **Zadan je polumjer r i visina v uspravnoga stošca. Upiši u nj valjak najvećega plašta. Kako se odnose volumi tih tjelesa?**
Polumjer valjka neka je x, visina z, ploština plašta y. Primijeni svojstvo pramena. $x=\frac{r}{2}$, $z=\frac{v}{2}$, $y=\frac{r.v.\pi}{2}$, $V_s: V_v=8:3$.

240. **U zadan uspravan stožac visine v i polumjera r upiši valjak najvećega voluma.**
Polumjer valjka neka je r. Primijeni svojstvo pramena. $x=\frac{2}{3}r$, visina stošca $=\frac{v}{3}$; $V_{max.}=\frac{4}{27}r^2\pi v$.

241. **U kuglu polumjera r upiši valjak najvećega voluma.**
Visina valjka neka je $v=2z$, gdje z znači udaljenost baze od središta kugle. Polumjer valjka neka je x. $x=\sqrt{\frac{2}{3}}r$, $v=\frac{2}{\sqrt{3}}r$; $V_{max}=\frac{4}{9}\sqrt{3}\,r^3\pi$.

242. **U kuglu polumjera r upiši stožac najvećega voluma.**
Polumjer stošca neka je x, a visina v.
$x=\frac{2}{3}\sqrt{2}\,r$, $v=\frac{4}{3}r$, $V_{max}=\frac{32}{81}r^3\pi$.

243. **U parabolinu segmentu, koji je omeđen tetivom $2b$ okomitom na os parabole, a ima udaljenost a od tjemena parabole, načini najveći pravokutnik.**
Baza pravokutnika neka je x, a visina 2y. Kod parabole se apscise odnose kao kvadrati ordinata. Iz toga slijedi: $(a-x):a=y^2:b^2$ ili $y=b\sqrt{\frac{a-x}{a}}$.
$P=\frac{2b}{\sqrt{a}}.x\sqrt{a-x}$. Iz $P'=0$ slijedi $\sqrt{a-x}=\frac{x}{2\sqrt{a-x}}$
ili $x=\frac{2}{3}a$; $y=\frac{b}{3}\sqrt{3}$, $P_{max.}=\frac{4}{9}\sqrt{3}\,ab$.

§ 9. ARITMETIČKE PROGRESIJE.

244. **U aritmetičkoj je progresiji $a_1=-7$; $d=-\frac{3}{2}$; kolik je 30. član i suma prvih 30 članova?**
$a_{30}=-50{\cdot}5$, $s_{30}=-862{\cdot}5$.

245. **Neka se odredi aritm. progresija, od koje je zadano: $a_8+a_{12}=5$, $s_{10}-a_3=13$.**
$2a_1+18d=5$, $9a_1+43d=13$, $a_1=\frac{1}{4}$, $d=\frac{1}{4}$.

246. **Sluga je kroz čitavo vrijeme službovanja primio 100.000 D, a prve godine mu je bila plaća 1000 D.**

Koliko je godina služio, ako je dobivao svake godine 50 D više?
To je aritm. progresija s $a_1 = 1000$, $d = 50$, $s_n = 100.000$. Dobit ćeš pomoću formule za s_n: $n^2 + 39n - 4000 = 0$; odatle $n = 46{\cdot}7$ *god.*

247. Nađi prvi član arit. progresije, za koju vrijede relacije : $s_{12} = 80$, $a_2 = 0$.
$d = -\frac{40}{27}$; $a_1 = -\frac{40}{27}$.

248. Nađi sumu svih brojeva između 250 i 1000, koji su djeljivi sa 7.
Prvi broj iza 250, koji je djeljiv sa 7, jest 252, a zadnji, t. j. zadnji pred 1000, jest 994. Dakle: $a_1 = 252$; $a_n = 994$; $d = 7$; $n = 107$; $s_n = 66661$.

249. Nađi aritm. nizove, za koje vrijede relacije : $a_3 \cdot a_8 = 300$, $s_8 = 128$.
$a_1^2 + 9a_1 d + 14d^2 = 300$, $2a_1 + 7d = 32$, $21d^2 - 128d + 176 = 0$; $d_1 = 4$, $d_2 = \frac{44}{21}$, $a_1 = 2$, $a'_1 = \frac{26}{3}$. Nizovi su :
1.) *2, 6, 10,....*, 2.) $\frac{26}{3}, \frac{226}{21}, \ldots\ldots$

250. „Koliko imate golubova?" upita kupac seljaka. Ovaj mu odgovori : „Za prvoga mi goluba platite 3 pare, za drugoga 4 pare, i tako za svakoga daljnega 1 paru više; drugim riječima : dajte mi 3·75 D, pa su golubovi vaši". Koliko je golubova bilo i koliko je kupac za svakoga goluba poprijeko platio?
$n^2 + 5n - 750 = 0$; $n = 25$; komad je stajao: $\frac{375}{25} = 15$ *para.*

251. Koliko ima u nizu 1 do 100 brojeva djeljivih s 3?
$a_1 = 3$, $d = 3$, $a_n = 99$; $99 = 3 + (n-1)\,3$; $n = 33$.

252. Za koje aritm. progresije vrijede relacije : $a_1 \cdot a_2 - 1 = a_5$, $3a_3 - 1 = a_8$?
$a_1^2 + a_1 d - a_1 - 4d - 1 = 0$; $2a_1 - 1 = d$. Odavle: $3a_1^2 - 10a_1 + 3 = 0$; $a_1 = 3$, $a'_1 = \frac{1}{3}$, $d = 5$, $d' = -\frac{1}{3}$.

253. Za koju aritm. progresiju vrijede relacije : $a_4 - a_2 = 10$, $a_8 - a_5 + a_{12} = 73$?
Prva jednadžba daje : $d = 5$, a druga $a_1 + 14d = 73$; odatle $a_1 = 3$.

254. Produkt 2. i 8. člana aritm. progresije je 4, a produkt 3. i 12. člana je 9. Koje su to progresije?
Homogene jednadžbe! Načini homogenu jednadžbu bez apsolutnoga člana. Dobit ćeš $a_1^2 + 4a_1 d - 5d^2 = 0$. Ovamo stavi: $a_1 = d.u$; dobit ćeš : $u^2 + 4u - 5 = 0$, a odatle $u_1 = 1$, $u_2 = -5$. Prema tome: $a_1 = d$, $a'_1 = -5d$;
$d = \pm\frac{1}{2}$, $d' = \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a_1 = \pm\frac{1}{2}$, $a'_1 = \pm 5i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

255. Nađi aritm. progresiju iz relacija: $a_8 + a_{17} = 121$, $a_{18} = 11a_2$.
$2a_1 + 23d = 121$; $3d = 5a_1$; $a_1 = 3$, $d = 5$.

256. Nađi s_9 niza: $\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}-1}, \ldots\ldots$
$d = \frac{1}{2}$, $s_9 = \frac{9}{2}.(3 + \sqrt{3})$.

257. Ploština pravokutnoga trokuta, kojemu stranice čine aritm. progresiju, jest 588 cm²; kolike su stranice?
Stranice neka su a_1, a_2, a_3. Dobit ćeš : $a_1 \cdot a_2 = 1176$, $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$ (Pitagorin poučak), $d = 7\sqrt{2}$, $a_1 = 21\sqrt{2}$, $a_2 = 28\sqrt{2}$, $a_3 = 35\sqrt{2}$.

258. Među siromahe razdijeljeno je 1400 D tako, da je prva polovica siromaha dobila ukupno 450 D, a posljednji je siromah dobio najviše, i to 230 D. „Koliko je bilo siromaha i koliko je dobio pojedinac?
$1400 = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, (1) $450 = \frac{n}{4}(a_1 + a_{\frac{n}{2}})$, (2)
$230 = a_1 + (n-1)d$. (3)
Iz (1) i (2) eliminiraj $a_1 n$; dobit ćeš $n^2 d = 2000$ (4). Jednadžbu (3) pomnoži s n, pa iz nje i iz (1) eliminiraj $a_1 n$; dobit ćeš: $d = \frac{460n - 2800}{n(n-1)}$ (5). To uvrsti u (4); dobit ćeš : $23n^2 - 240n + 100 = 0$; odatle : $n = 10$; iz (4) dobit ćeš : $d = 20$, a iz (5): $a_1 = 50$. Pojedinci su dobili: *50, 70, 90, 110* i t. d.

259. Odredi arit. progresiju, za koju vrijedi :
$\frac{a_2 a_6}{a_4} = a_3 - \frac{4}{3}$, $\frac{a_7}{a_3} = 3$.
Prva jednadžba daje: $3d^2 - 3a_1 d - 4a_1 - 12d = 0$; a druga : $2a_1 = 0$ ili $a_1 = 0$. To uvršteno daje $3d^2 - 12d = 0$ ili $d = 4$.

260. Stranice kosokutnoga trokuta čine aritm. progresiju, kojoj je suma 21, a ploština je trokuta $\frac{21}{4}\sqrt{11}$. Kolike su stranice i kutovi?
Za stranice upotrijebi Heronov poučak, a za kutove $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ itd. $a=5$, $b=7$, $c=9$, $\alpha=50^0 42' 11''$, $\beta=33^0 33' 29''$.

261. Nađi aritm. progresiju iz relacija: $a_{13}:a_{16}=21:26$, $a_4+a_6+a_8=2(a_9-1)$.
$5a_1-3d=0$; $a_1-d+2=0$; $a_1=3$, $d=5$.

262. Među dva broja, koji se odnose kao 1 : 16, interpolirano je 24 broja. Ako svi brojevi čine aritm. progresiju, u kojoj je 12. interpolirani član 41, koji su to brojevi?
$x:y=1:16$, $y=16x$, $\delta=\frac{y-x}{r+1}=\frac{3x}{5}$, $x+12\frac{3x}{5}=41$; $x=5$; $\delta=3$, $y=80$.

263. Među 2 i 65 interpolirani su brojevi, koji s ovima čine aritm. progresiju. Ako za tu progresiju vrijedi relacija $a_2:a_7=1:4$, koliko je brojeva interpolirano?
Broj članova neka je n; $r=n-2$; $\delta=\frac{63}{r+1}$. $a_1=2$; $(2+\delta):(2+6\delta)=1:4$; $\delta=3$; $r+1=\frac{63}{\delta}$; $r=20$.

264. Za koju aritm. progresiju vrijede relacije: $a_6+a_{10}=2\sqrt{2}+7$; $a_3:a_7=(2\sqrt{2}+1):7$?
$2a_1+14d=2\sqrt{2}+7$; $3a_1+4d=\sqrt{2}\,a_1+6\sqrt{2}\,d$. Iz 1. jednadžbe izrazi a_1 i uvrsti u drugu. Dobit ćeš: $d(2\sqrt{2}-34)=\sqrt{2}-17$ ili $d=\frac{1}{2}$; $a_1=\frac{2\sqrt{2}+7-14d}{2}=\sqrt{2}$.

265. Među 3 i 4 interpoliraj 9 članova tako, da čine aritm. progresiju; kolika je suma svih članova progresije?
$\delta=\frac{1}{10}$; $s_{11}=\frac{77}{2}$.

266. Među 7 i 8 interpoliraj 9 članova, koji sa zadanima čine aritm. progresiju. Kolika je suma svih članova?
$\delta=\frac{1}{10}$; $s_{11}=\frac{165}{2}$.

267. Među 0 i 12 uvrsti toliko brojeva, koji sa zadanima čine aritm. progresiju, da bude suma svih brojeva 150. Kolika je diferencija i koliko se brojeva mora uvrstiti?
$\delta=\frac{12}{r+1}$, $150=\frac{r+2}{2}(0+12)$; $\delta=\frac{1}{2}$, $r=23$.

268. Među 2 i 5 uvrsti 9 članova, koji sa zadanima čine aritm. progresiju.
$\delta=0{\cdot}3$; niz: 2, $2{\cdot}3$, $2{\cdot}6$, $2{\cdot}9$.....

269. Među 1 i 2 interpoliraj 19 brojeva, koji sa zadanima čine aritm. progresiju.
$\delta=\frac{1}{20}=0{\cdot}05$; niz: 1, $1{\cdot}05$, $1{\cdot}1$, $1{\cdot}15$,....

270. Suma dvaju brojeva je 38, a njihova diferencija 32. Među ta dva broja uvršteni su brojevi, koji s njima čine aritm. progresiju. Koliko je brojeva uvršteno, ako je 4. uvršteni broj 19?
$x+y=38$, $x-y=32$, $x=35$, $y=3$; $\delta=\frac{32}{r+1}$; $19=3+4\cdot\frac{32}{r+1}$; odatle $r=7$.

271. Među 0 i 1 interpoliraj toliko brojeva, koji će s ovima činiti aritm. progresiju, da bude diferencija susjednih brojeva 0·1.
$0{\cdot}1=\frac{1}{r+1}$; $r=9$.

272. Koliko je članova aritm. progresije interpolirano među 10 i 100, ako je suma interpoliranih članova 440? Koji su to članovi?
$s_{r+2}-110=440$ ili $\frac{r+2}{2}\cdot 110=550$; $r=8$; $\delta=\frac{90}{r+1}=10$.
Niz interpoliranih članova jest: 20, 30,.... 90.

273. Među −5 i 70 interpoliraj brojeve, koji s ovima čine aritm. progresiju. Koliko je brojeva interpolirano, ako se 10. i 21. član dobivene progresije odnose kao 2 : 5?
$\left(a_1+9\frac{75}{r+1}\right):\left(a_1+20\frac{75}{r+1}\right)=2:5$; $a_1=-5$, $\delta=\frac{75}{r+1}$; $r=24$, $\delta=3$.

§ 10. GEOMETRIJSKE PROGRESIJE.

274. Suma je 1. i 4. člana geom. niza 630, a 2. i 3. člana 150. Koji je to niz?
$q_1 = 5$; $q_2 = \frac{1}{5}$; 1.) *5, 25, 125,...* 2.) *625, 125, ...5, 1...*

275. Od geom. progresije poznato je $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{10}$; kolik je 10. član i s_5?
$a_{10} = (\frac{1}{10})^9 = 10^{-9}$; $s_5 = 1 \cdot 1111$.

276. Suma prvih dvaju članova beskonačne geom. progresije jednaka je $\frac{1}{2}$, suma 3. i 4. člana jest $\frac{1}{8}$. Kolika je suma niza?
$q = \pm\frac{1}{2}$; 1.) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... = \frac{2}{3}$ 2.) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} + = \frac{2}{9}$.

277. Tri prijatelja dadu u dobrotvorne svrhe svaki po 20 para uz obvezu, da će idući dan ubrati svaki od trojice svojih prijatelja isto tako po 20 para, a ovi će treći dan ubrati od trojice svojih prijatelja po 20 para i t. d. Kad bi se tako sabiralo svaki dan kroz mjesec dana (30 dana), koliko bi se novca sabralo?
To je geom. progresija s $q = 3$. Prvi bi se naime dan sabralo 60 para, drugi dan 180 para, treći dan 540 para i t. d. $S = 61761 \cdot 3$ milijarde D.

278. 728 D ima se razdijeliti među 6 osoba tako, da druga osoba dobije 3 put više negoli prva; treća osoba 3 put više negoli druga i t. d. Koliko je dobila pojedina osoba?
Svota prve osobe neka je x. Bit će: $728 = x\frac{3^6 - 1}{2}$; odatle: $x = 2$. Svote su: *2, 6, 18, 54, 162, 486.*

279. Znamenke troznamenkasta broja čine geom. niz. Suma 1. i 3. znamenke je 2·5 puta veća od srednje znamenke. Obrne li se red znamenaka, umanji se broj za 297. Koji je to broj?
Znamenke neka su x, y, z; $x + z = 2 \cdot 5\, y$ (1); $99z - 99x + 297 = 0$ (2); $z = xq^2$, $y = xq$ (3). Uvrsti (3) u (1); dobit ćeš skrativši jednadžbu s x:

$q^2 - 2 \cdot 5q + 1 = 0$. Zadovoljava samo $q = \frac{1}{2}$.
To uvršteno u (2) daje s obzirom na (3): $x = 4$; $y = 2$; $z = 1$. Traženi je dakle broj *421.*

280. Nađi geom. progresiju, za koju vrijede relacije:
$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{7}{12}$, $\frac{1-q}{a_1} = \frac{3}{2}$.
$a_1(1 + q + q^2) = \frac{7}{12}$, $a_1 = \frac{2}{3}(1 - q)$. Te jednadžbe daju:
$1 - q^3 = \frac{7}{8}$. $q = \frac{1}{2}$; $a_1 = \frac{1}{3}$.

281. Suma prvih triju članova geom. progresije jest 28, a suma potonjih triju 3·5. Koja je to progresija?
$a_1 + a_2 + a_3 = 28$, $a_4 + a_5 + a_6 = 3 \cdot 5$. Izrazi svaki član s prvim članom i dobivene jednadžbe podijeli. Dobit ćeš: $\frac{1}{q^3} = 8$. $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = 16$.

282. U neki je kvadrat stranice a upisan krug, a u taj krug kvadrat; u taj opet krug i t. d. Izračunaj: 1.) zbroj ploština svih kvadrata, 2.) zbroj ploština svih krugova.
Suma kvadrata $= a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + ... = 2a^2$.
Suma krugova $= \frac{a^2}{4}\pi + \frac{a^2}{8}\pi + \frac{a^2}{16}\pi + ... = \frac{a^2}{2}\pi$.

283. Visina, širina i dužina pravokutnoga paralelopipeda čine geom. progresiju. Volumen paralelepipeda je 1000 cm³, a oplošje 700 cm². Kolike su dimenzije?
Bridovi neka su x, y, z. $xyz = 1000$ (1); $xy + xz + yz = 350$ (2); $y = xq$, $z = xq^2$ (3). Jednadž- dnadžbe (1) i (3) daju $xq = 10 = y$; q ćeš dobiti, kad $x = \frac{10}{q}$ uvrstiš u (2). Dimenzije su *5, 10, 20.*

284. Postoje 4 broja, koji čine geom. progresiju i druga 4 broja, koja čine aritm. progresiju. Ako od brojeva geom. progresije odbijemo istoimene članove (t. j. članove jednakoga indeksa) aritm. progresije, dobit ćemo po redu brojeve 1, 5, 19, 53. Koji su to brojevi?
$a_1 - b_1 = 1$, $a_2 - b_2 = 5$, $a_3 - b_3 = 19$, $a_4 - b_4 = 53$.
$a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$, $b_2 = b_1 + d$, $b_3 = b_1 + 2d$,

$b_4 = b_1 + 3d$. Geomet. progresija: *10, 20, 40, 80;* aritm. progresija: *9, 15, 21, 27.*

285. **Zadana je aritm. progresija od 3 člana. Prvi je član 5, a diferencija je 2. Neka se nađe geom. progresija s isto toliko članova s kvocijentom 2, kojoj je suma svih članova jednaka sumi svih članova aritm. progresije. Koje su to progresije?**

Aritm. progresija: *5, 7, 9*; $21 = \frac{2^3-1}{2-1} a_1$. Geom. progresija: *3, 6, 12.*

286. **Među 5 i 135 uvrsti takva dva broja, da dobiješ geom. progresiju od 4 člana. Koji su interpolirani brojevi?**

$q' = \sqrt[r+1]{\frac{135}{5}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $a_2 = 15$; $a_3 = 45$.

287. **Među svaka dva člana progresije 1, 12, 12^2, 12^3... uvrsti dva člana, da se dobije opet geom. progresija. Koji je član te progresije 1728?**

$q' = \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}}$; $1728 = 12.^{\frac{n-1}{3}}$ ili $12^3 = 12.^{\frac{n-1}{3}}$, $n = 10$.

288. **Kod temperovanih glazbenih instrumenata ima oktava 13 glasova. Ako ima ton *a* 435 titraja u sekundi, koliko ima titraja ton *f*?**

Broj titraja tih tonova čine geom. progresiju od 13 članova. *f* je 9. član te progresije, kojoj je prvi član 435, a posljednji 2.435. Među ta dva člana ima se interpolirati 11 članova. Prema tome je $q' = \sqrt[12]{2}$; $a_9 = 690 \cdot 5$.

289. **Kolika je suma niza $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ..$ ad inf.**

$S = \frac{a_1}{1-q} = 1 \cdot 5$.

290. **Zbroji $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + ...$ ad inf.**

$S = \frac{a_1}{1-q} = 3$.

291. **Za beskonačnu geom. progresiju sume $s = \frac{2}{3}$ vrijedi $a_1 - a_2 = \frac{1}{6}$; koja je to progresija?**

$a_1(1-q) = \frac{1}{6}$; $\frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{3}$. Te jednadžbe pomnožene daju $a_1 = \pm\frac{1}{3}$; $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{3}{2}$. Dvije su dakle progresije: 1.) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, ...$; 2.) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, ...,$ od kojih druga divergira ($s = -\infty$), pa zato ne odgovara zadatku.

292. **Kad bismo neku dužinu produljili za njezinu $\frac{3}{4}$-nu, a dobivenu dužinu opet produljili za njezinu $\frac{3}{4}$-nu i tako nastavljali, približavali bi se nekoj dužini, a da je ipak ne bismo nikada točno polučili. Kojoj bismo se dužini približavali?**

Prvobitnu dužinu smatraj jedinicom, pa će biti dužina, kojoj se sve više približujemo, dana s izrazom: $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + ...$ ad inf. $= 4$.

293. **U beskonačnoj geom. progresiji realnih brojeva je diferencija suma prvih dvaju i potonjih dvaju članova $\frac{64}{9}$, a suma 5. i 6. člana $\frac{8}{81}$. Kolika je suma te konvergentne progresije?**

$(a_1+a_2) - (a_3+a_4) = \frac{64}{9}$, $a_5 + a_6 = \frac{8}{81}$. Kad se svi članovi izraze pomoću prvoga člana i jednadžbe podijele, dobit će se: $\frac{1+q-q^2-q^3}{q^4(1+q)} = 72$ ili $\frac{(1+q)-q^2(1+q)}{q^4(1+q)} = 72$. Odatle $q^2 = \frac{1}{9}$. Druga vrijednost za q^2 ne odgovara. Za $q = \frac{1}{3}$ slijedi: $a_1 = 6$; $s = 9$. Za $q = -\frac{1}{3}$ slijedi: $a_1 = 12$; $s = 9$.

§ 11. KAMATNO-KAMATNI RAČUN.

294. **Koja bi glavnica narasla u 6 godina na 5450 D uz 5%, kad bi se kamate priklapale glavnici triput u godini?**

$5450 = C. (1 + \frac{5}{300})^{18}$. $C = 4045\ D$.

295. **Netko kupi kuću za 2 milijuna D uz pogodbu, da tu svotu isplati nakon 5 godina. Koliko bi kuća**

stajala, da je isplati odmah, ako se računa 5% kamata?
$C = \frac{2.10^6}{1{\cdot}05^5} = 1567000\ D.$

296. Kolika je sadanja vrijednost duga od 15.000 D, koji bi se morao platiti nakon 15 godina uz 4%?
$C = \frac{Cn}{q^n} = \frac{15.000}{q^{15}} = 8329\ D.$

297. A posudi B-u 600 D i dade si ispostaviti obveznicu na 800 D, po kojoj mu se mora ta svota isplatiti nakon 3 godine. Koliko je postotaka zaračunao?
$800 = 600q^3$; $q = 1{\cdot}1007$, $p = 10\%$.

298. Netko ima pravo tražiti 6000 D nakon 4 godine. Koliko smije tražiti sada, ako se kamate računaju 4%?
$x = \frac{6000}{1{\cdot}04^4} = 5128{\cdot}82\ D.$

299. Netko uloži u jednu banku 10.000 D uz 4% i uz polugodišnje ukamaćivanje, a u drugu banku isto toliko i uz iste postotke, ali uz godišnje ukamaćivanje. S kolikim novcem on raspolaže nakon 10 godina?
$C_n = 10.000(1{\cdot}02^{20} + 1{\cdot}04^{10})$; $C_n = 29661\ D.$

300. Netko ima pravo, da nakon 10 godina digne iz doznačene mu banke 25.000 D, a želi taj novac podići već sada. Koliko će mu banka isplatiti, ako ukamaćuje dvaput na godinu uz 5%?
$C = \frac{25000}{1{\cdot}025^{20}} = 15257\ D.$

301. Nakon koliko će godina 500.000 D narasti na 1 milijun D, ako je novac uložen uz 6%?
$10^6 = 5.10^5 . q^n$, ili $q^n = 2$, $n = 11{\cdot}722$ *god.*

302. Glavnica 25.000 D, koja dospijeva iza 5 godina, ima sadanju vrijednost 20.000 D. Koliki su postoci?
$25 = 20q^5$, $q = 1 + \frac{p}{100}$; $p = 4{\cdot}56\%$.

303. Kad je A htio prodati svoje dobro, ponudi mu B 24.000 D i ovu bi mu svotu isplatio odmah. C mu ponudi 30.000 D, ali bi mu isplatio beskamatno nakon 4 godine. D mu ponudi 36.000 D, od kojih bi mu 6.000 D isplatio odmah, 12.000 D nakon 4 godine, a ostalo tek nakon 8 godina; i to sve beskamatno. Koji je od kupaca nudio najviše, ako se računa 5%?
Nađi od svih ponuda sadanje vrijednosti prema $C = \frac{Cn}{q^n}$.
Najbolja je ponuda kupca D, jer je sadanja vrijednost njegove ponude 28055 D, dok je kupca C 24681 D.

304. Dva kapitala, od kojih je jedan za 1200 D veći, narastu u 14 godina uz 4% toliko, da zajedno broje 45.000 D. Koliki su uloženi kapitali?
Kapitali neka su x i x+1200. $(2x+1200) . q^{14} = 45.000$. $x = 12393{\cdot}19\ D.$

305. Kapital uložen pred 25 godina uz 6% narastao je na 10.000 D. Koliko je bilo uloženo?
$C = \frac{Cn}{q^n}$; $C = 2329{\cdot}98\ D.$

306. Netko uloži na 10 godina 2000 D uz 4%. Nakon 10. godine uloži još 5000 D. Koliko je godina bio nov kapital uložen, ako je konačna vrijednost tih kapitala 20.000 D, a kamate se računaju odsada 6%?
Izračunaj konačnu vrijednost prve glavnice nakon 10 godina i tomu dodaj drugu glavnicu, pa traži konačnu vrijednost nakon *n* godina. Dobit ćeš: $7960{\cdot}5\ q^n = 20.000$. $n = 15{\cdot}80$ godina.

307. Glavnica od 8000 D bila je 5 godina ukamaćena uz 3·75%, a zatim *n* godina uz 4%. Ako je ta glavnica kroz to vrijeme narasla na 12.000 D. koliki je n?
$12000 = 8000 . 1{\cdot}0375^5 . 1{\cdot}04^n$. $n = 5$ *godina* i *230 dana.*

308. Neka je glavnica bila uložena 5 godina uz 4% i godišnje priklapanje, a zatim je bila zajedno s kamatama uložena 8 godina uz $2\frac{1}{4}$% i polugodišnje priklapanje. Kolika je bila početna glavnica, ako je konačna 7860 D?
$7860 = x . 1{\cdot}04^5 . 1{\cdot}01125^{16}$; $x = 5401{\cdot}7\ D.$

309. Netko kupi kuću za 51.000 D uz pogodbu, da $\frac{1}{5}$ cijene isplati odmah, $\frac{1}{4}$ cijene nakon godinu dana, $\frac{1}{3}$ nakon 2 godine, a ostatak nakon 3 godine zajedno s kamatama svake otplate. Kolike su pojedine otplate, ako se kamate uz 6% priklapaju polugodišnje?
Otplate su $s_1 = 10200$ D; $s_2 = 12750.q'^2$, $s_3 = 17000.q'^4$, $s_4 = 11050.q'^6$, ili $s_2 = 13526{\cdot}48$ D, $s_3 = 19133{\cdot}65$ D, $s_4 = 13194{\cdot}27$ D.

310. Lihvar posudi od nekoga na 10 godina 10.000 D uz 3% i taj novac uzajmi odmah drugomu na 10 god. uz 6%. Kolik dobitak D ima lihvar na koncu 10. godine?
$D = 10000(1{\cdot}06^{10} - 1{\cdot}03^{10}) = 17909 - 13439 = 4470$ D.

311. Dvije glavnice, od kojih je jedna za 400 D veća od druge, rastu kroz 12 godina tako, da im je konačna vrijednost zajedno 30.000D. Kolike su bile početne glavnice, ako se kamate računaju 4%?
Ako je prva glavnica x, druga je x+400.
Dakle $30000 = (2x+400)q^{12}$. $x = 9169$ D.

312. Koliki je prirast (u postocima) stanovništva nekoga grada, ako je ono u 9 godina naraslo od 208700 na 318500?
$3185 = 2087.q^9$. $p = 4{\cdot}8\%$.

313. Pučanstvo kraljevstva, koje broji 7 milijuna ljudi, raste uz 2%. Kada će pučanstvo brojiti 8 milijuna ljudi?
$8 = 7.q^n$. $n = 6{\cdot}743$ godine.

314. U gradu, koji ima 25378 stanovnika, narastao je njihov broj za izvjesni procenat. U idućoj godini porastao je broj stanovništva za procenat, koji je za 1 veći od onoga prijašnje godine. Koji je to procenat, ako je na koncu 2. godine grad brojio 27184 stanovnika?
$25378\,(1+\frac{p}{100})\,(1+\frac{p+1}{100}) = 27184$ ili $q^2 + \frac{q}{100} = \frac{27184}{25378}$;
$q = \frac{1+203}{200}$ ili $p = 2\%$.

§ 12. RENTNI RAČUN.

315. Koja se svota mora ulagati 1. siječnja svake godine, da bude nakon 10 godina vrijednost svih uložaka 12.662 D, ako se računa $4^1/_4\%$?
$12662 = r\,\frac{q^{10}-1}{q-1}$; $r = 1000$ D.

316. Glavnici 1000 D dodaje se kroz 10 godina godišnje 500 D. Na koliko je glavnica narasla u vrijeme posljednje uplate, ako se kamate računaju uz 6%, a priklapaju se glavnici dvaput u godini?
$1000 \,.\, 1{\cdot}03^{20} + 500\,\frac{1{\cdot}03^{20}-1}{0{\cdot}0609} = S = 8424.43$ D.

317. Šuma, koja ima 32.000 m³ drva, mora se sasjeći u 20 godina. Koliko se mora sasjeći drva svake godine, ako je prirast šume $2\frac{1}{2}\%$?
$32000q^{20} - x\,\frac{q^{20}-1}{q-1} = 0$. $x = 2053$ m³.

318. Otac počne, kad mu se rodio sin, ulagati za nj kroz 25 godina godišnje 200 D. Koliko je sin dobio nakon navršene 25. godine, ako se ukamaćivalo sa 6%?
$200\,\frac{q^{25}-1}{q-1}\,q = x = 11632$ D.

319. Netko je uložio 300 D, da može nakon 30 godina dobivati rentu, koja će trajati 15 godina (a počet će koncem 31. godine). Kolika je renta, ako se računa 5%?
$300\,q^{45} = x\frac{q^{15}-1}{q-1}$; $x = 739$ D.

320. Kolika je sadašnja vrijednost rente od 500 D, koja bi uz 6% trajala 10 godina, a dospijevala početkom godine?
$x = 500\,\frac{q^{10}-1}{q-1}\,.\,\frac{1}{q^9} = 3901$ D.

321. Netko želi graditi kuću u vrijednosti 1 milijuna D. U tu svrhu posudi taj novac od banke, koja traži 4% kamata, i da joj dug namiri u jednakim godišnjim obrocima kroz 10 godina. Kolika je godišnja otplata?
$10^6 \,.\, q^{10} = r\,.\,\frac{q^{10}-1}{q-1}$; $r = 123300$ D.

322. Trgovac je bio dužan plaćati početkom svake godine kroz 6 godina 4000 D, ali nije plaćao ništa. Koliko je dužan na koncu 6. godine, ako su mu se kamate računale 4%?
$4000\,q \cdot \frac{q^6-1}{q-1} = x = 27593{\cdot}07\,D.$

323. Kapitalu od 6000 D, uloženom uz 5%, dodaje se koncem svake godine 500 D kroz 10 godina. Kolika je vrijednost kapitala nakon 10. uplate?
$6000\,q^{10} + 500\frac{q^{10}-1}{q-1} = x = 16062{\cdot}32$ D.

324. Netko želi siromašnom prijatelju osigurati godišnju potporu od 1000 D, koju će dizati kroz 10 godina svršetkom godine. Koliku će svotu morati dobročinitelj položiti u banci, koja računa kamate 4%, ako se ta svota ima iscrpsti s desetom rentom?
$1000\frac{q^{10}-1}{q-1} = x \cdot q^{10}$; $x = 8111\,D.$

325. Netko ulaže početkom svake godine stalnu svotu. Na taj način on raspolaže na koncu 5. godine s kapitalom od 2816·49 D, a na koncu 10. godine s kapitalom od 6243·18 D. Koliko je ulagao, i uz koliko postotaka?
$rq \cdot \frac{q^5-1}{q-1} = 2816{\cdot}49$; $rq = \frac{q^{10}-1}{q-1} = 6243{\cdot}18$; Odatle (dijeljenjem jednadžbi) : $p = 4\%$, $r = 500$ D.

326. Dug se od 1000 D ima namiriti s 5 jednakih godišnjih otplata, koje će se otplaćivati koncem godine. Kolika je otplata, ako se ukamaćuje s 5%?
$1000\,q^5 = x\frac{q^5-1}{q-1}$; $x = 230{\cdot}97$ D.

327. Netko ulaže početkom svake godine r D uz 3%. Početkom 2. godine imao je 406 D, a nakon n godina imao je 10 puta više. Kako je dugo ulagao i koliko?
$r \cdot \frac{q^2-1}{q-1} = 406$; $rq\frac{q^n-1}{q-1} = 4060.$ $n = 15{\cdot}07$ godina, $r = 200\,D.$

328. Koliku svotu treba uložiti danas, da se time osigura godišnja renta od 1500 D, koja dospijeva koncem godine, a traje 20 godina, ako se računa 4%? Renta se počinje dizati koncem iste godine, kad je položena glavnica.
$C = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 20385{\cdot}49\,D.$

329. U 30 godina ima se isplatiti dug od 1 milijun D s jednakim godišnjim otplatama, koje dospijevaju koncem godine. Kolika je godišnja otplata uz polugodišnje ukamaćivanje s 6%?
$C \cdot q'^{60} = r\frac{q'^{60}-1}{q'^2-1}$. $r = 73181{\cdot}7\,D.$

330. Šuma ima 200.000 m³ drva, a godišnji joj je prirast 2%. Koliko se smije sjeći svake godine, da se šuma iskrči za 20 godina?
$2.10^5 \cdot q^{30} = r\frac{q^{20}-1}{q-1}$. $r = 1539{\cdot}8$ m³.

331. Netko ulaže godišnje 2000 D kroz 30 godina uz 4%. Koliko će imati u vrijeme posljednje otplate?
$x = 2000\frac{q^{30}-1}{q-1} = 11217\,D.$

332. Netko ima pravo da nakon 15 godina počne dizati iz novčanoga zavoda godišnju rentu od 1000 D kroz 20 godina. Kad bi on htio, da rentu diže 8 godina prije i da traje 10 godina, pa bi u tu svrhu sada u zavodu položio 2.500 D, koliku bi rentu mogao dizati, ako se kamati računaju $5\frac{1}{2}\%$?
Nađi tim rentama sadanju vrijednost, pa mora biti:
$1000\frac{q^{20}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{34}} + 2500 = r\,\frac{q^{10}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{16}}.$ $r = 1490{\cdot}4\,D.$

333. Netko ulaže kroz n godina uz 6% početkom svakoga polugodišta r D. Ako se vrijednost kapitala, narasloga koncem 17. godine, uzme peterostruko, dobit će se svota, koja je za 1232·57 D manja od one svote, na koju su narasle sve uplate koncem n-te godine. Ako je vrijednost svih uplata koncem 5. godine 3542·34 D, kako je dugo i koliko ulagao?
$5r\frac{q'^{34}-1}{q'-1}q' + 1232{\cdot}57 = r\frac{q'^{2n}-1}{q'-1}q'$; $r\frac{q'^{10}-1}{q'-1}q' =$
$= 3542{\cdot}34$; $n = 38{\cdot}5$ *god.* $r = 300$ D.

334. Netko počne ulagati početkom godine 2000 D kroz

15 godina, a osim toga uloži početkom 16. godine još 4165 D. Koliko će imati nakon 30 godina, ako se ukamaćuje s 4%?

$2000\ q^{15} \frac{q^{15}-1}{q-1} + 4165 . q^{14} = x = 10097\ D.$

335. Dug od 2 milijuna D mora se kroz 60 godina otplaćivati u jednakim otplatama. Kolika je otplata, ako se ukamaćuje s 3½%?

$a = \frac{210^6 q^{60}(q-1)}{q^{60}-1} = 80170\ D.$

336. Koliko treba uložiti uz 4%, da se time osigura godišnja renta od 1500 D, koja dospijeva početkom godine, traje 20 godina, a počinje se dizati početkom 21. godine?

$C. q^{20+19} = r. \frac{q^{20}-1}{q-1} \qquad C = 9675{\cdot}60\ D.$

337. Netko je uložio kapital 100.000 D uz 5%. Svoje godišnje troškove, koji iznose 6000 D, ne može namiriti samo kamatama, pa je zato prisiljen dirati u glavnicu. Nakon koliko će godina taj ostati bez novca i koliko je oduzimao od glavnice svake godine?

$10^5 q^n = 6.10^3 \frac{q^n-1}{q-1}$; $n = 36{\cdot}72$ *godina*. Godišnje kamate od 100.000 D jesu 5000. Prve je godine dakle umanjio glavnicu za 1000 D. Druge je godine glavnica 99000 D, a kamate su 4950 D; glavnicu je dakle umanjio za 1050 D i t. d.

338. Općina je posudila od gospoštije 20.000 D uz 5%, a za to je dala gospoštiji na uživanje šumu, koja izbacuje godišnje čistih 1500 D. Koliko godina smije gospoštija tu šumu pravedno uživati?

$20.000\ q^n = 1500 \frac{q^n-1}{q-1}. \qquad n = 22$ *god.*

339. Od uložena kapitala 30.000 D uz 4% vadi se koncem svake godine 800 D. Kolik je kapital na koncu 15. godine?

$30000\ q^{15} - 800 \frac{q^{15}-1}{q-1} = x = 38009{\cdot}44\ D.$

340. Netko ima pravo uživati godišnju rentu 500 D kroz 6 godina, a želi to pravo prodati. Za k olikoće to

pravo prodati, ako se računaju kamate 3½%?

$500 \frac{q^6-1}{(q-1). q^6} = x = 2665\ D.$

341. Netko ima pravo da nakon 20 godina dobije svotu 10.000 D, pa želi mjesto toga da kroz tih 20 godina diže početkom godine neku stalnu svotu. Kolika je ta svota, ako se kamate računaju 4%?

$rq \frac{q^{20}-1}{q-1} = 10000. \qquad r = 322{\cdot}90\ D.$

342. Netko ima 15.000 D uloženih uz 4%. Prvih 10 godina ne vadi ništa, a godinu dana iza toga počinje vaditi neku svotu godišnje i to kroz 15 godina. Kolika je ta svota, ako je s petnaestim obrokom iscrpao sav kapital?

$15000\ q^{25} - r \frac{q^{15}-1}{q-1} = 0. \qquad r = 7391{\cdot}3\ D.$

343. Netko želi rentu od 2000 D, koja traje 15 godina, pretvoriti u rentu od 3000 D. Kako će dugo trajati ta renta, ako se računaju kamate 4%?

$2000 . \frac{q^{15}-1}{(q-1). q^{15-n}} = 3000. \frac{q^n-1}{q-1}$ ili $q^n = \frac{3q^{15}}{q^{15}+2}$; $n = 8{\cdot}97$ *godina.*

344. Netko uloži u jednu banku 10.000 D, a u drugu u isto vrijeme 14.000 D, a obadvije banke ukamaćuju s 4%. Nakon nekoliko godina digne on svoj novac zajedno s kamatama iz obje banke i uloži ga u treću banku uz 6% u namjeri, da može od ove dobivati rentu 4000 D kroz 30 godina, počevši godinu dana kasnije, otkako je sav novac uložio u tu banku. Kad je digao novac iz prve dvije banke?

Što je uložio u prve dvije banke, isto je, kao da je uložio u jednu banku. Bit će:

$24000\ q^n. q'^{30} = 4000. \frac{q'^{30}-1}{q'-1}$; ili $q^n = \frac{1}{6}. \frac{q'^{30}-1}{(q'-1)q'^{30}}$, $n = 21{\cdot}2$ *god.*

345. Ako je u banku uložen 1 milijun D uz 4% i iduće se godine počinje vaditi godišnje 50.000 D, kako se dugo to smije činiti, da preostali kapital izbacuje godišnje 35.000 D kamata?

U jednadžbi: $10^6 q^n - 5.10^4 . \frac{q^n - 1}{q-1} = C$ mora biti C tolik, da daje godišnje kamate 35.000 t. j. mora biti $C = \frac{35.10^3}{q-1}$. Dakle: $10^6 q^n - 5.10^4 . \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{35.10^3}{q-1}$. Krati s 10^3! *n = 10·3 godina.*

346. **Netko ulaže godišnje svotu kroz 20 godina, da time osigura dobrotvornom zavodu godišnju trajnu potporu od 50.000 D. Koliku svotu mora ulagati u banku, koja ukamaćuje sa 4%?**
Konačna vrijednost C svih uložaka mora biti tolika, da daje godišnje kamate 50.000 D, koje će zavod dizati. Dakle: $r . \frac{q^{20}-1}{q-1} = C$; $50000 = \frac{C.p}{100}$; ili, jer je $\frac{p}{100} = q - 1$ $50000 = C(q-1)$. Obje jednadžbe daju: $r = \frac{50000}{q^{20}-1}$. *r = 41978 D.*

347. **Vlasnik prodaje imanje uz pogodbu, da mu kupac isplati 500.000 D odmah, isto toliko nakon 3 godine, 80.000 D nakon 5 godina, 100.000 D nakon 8 godina, 150.000 D nakon 10 godina i 170.000 D nakon 15 godina zajedno s kamatama 4%. Kupac želi sve isplatiti kroz 15 godina u jednakim obrocima. Koliko bi morao plaćati godišnje?**
$1000(500 q^{15} + 500 q^{12} + 80 q^{10} + 100 q^7 + 150 q^5 + 170) = x . \frac{q^{15}-1}{q-1}$; *x = 86282 D.*

348. **Kolik je bio kapital uložen s 4½%, ako se od njega koncem svake godine oduzimalo 250 D, a nakon 15 godina je preostalo još 1300 D?**
$C. q^{15} - 250 \frac{q^{15}-1}{q-1} = 1300$. *C = 3356·77 D.*

349. **A duguje B-u 3981·58 D. Budući da taj dug ne može namiriti najedamput, dopusti mu B, da mu ga otplaćuje u godišnjim jednakim obrocima zajedno s kamatama i to kroz 12 godina. Koliko je otplaćivao na godinu, ako se računaju kamate 3%?**
$3981{\cdot}58 . q^{12} = x . \frac{q^{12}-1}{q-1}$; *x = 400 D.*

350. **Neka se godišnja renta od 200 D, koja kroz 10 godina dospijeva koncem godine, pretvori u drugu,**

koja će kroz 15 godina dospijevati početkom godine. Pri tom se imaju uzeti kamate 5%.
Izjednači sadašnje vrijednosti t. j.
$200 \frac{q^{10}-1}{q-1} . \frac{1}{q^{10}} = r . \frac{q^{15}-1}{q-1} . \frac{1}{q^{14}}$;
ili $r = 200. q^4 \frac{q^{20}-1}{q^{15}-1}$ = *372·52 D.*

351. **Kako se dugo smije oduzimati kapitalu od 100.000 D uloženom uz 5½% godišnja svota 6000 D i to koncem godine, da preostali kapital izbacuje trajno 3000 D?**
$100000 q^n - 6000 \frac{q^n-1}{q-1} = x$, $\frac{x.p}{100} = 3000$. Ove dvije jednadžbe daju *n = 33·5 god.*

352. **Netko uloži u banku 10.000 D uz 6%, da dobiva kroz 25 godina godišnju rentu. Kolika će biti renta, koju počinje dizati godinu dana kasnije, otkako je uložio rečenu svotu?**
$10000 q^{25} = x . \frac{q^{25}-1}{q-1}$. *x = 769 D.*

353. **Kako će dugo uz 6% uložena glavnica od 10.000 D davati godišnju rentu 1000 D, ako se prva renta ima dići godinu dana, nakon što je uložena glavnica?**
$10000 q^n = 1000 . \frac{q^n-1}{q-1}$. *n = 15·7 god.*

354. **Netko želi uživati rentu od 1500 D, koja dospijeva koncem godine, kroz 25 godina. Koju svotu mora položiti najedamput, ako banka ukamaćuje s 8%?**
$x . q^{25} = 1500 \frac{q^{25}-1}{q-1}$. *x = 16012 D.*

355. **Netko ima pravo da kroz 30 godina diže godišnju rentu od 2000 D. Tu rentu on diže samo 15 godina, a slijedeće godine želi, da mu se mjesto rente dade sav preostali novac. Koliko će dobiti, ako se kamate računaju 4%?**
Vrijednost je rente nakon 30 godina $2000 \frac{q^{30}-1}{q-1}$. Taj novac ima u 15. godini vrijednost $\frac{2000}{q^{15}} . \frac{q^{30}-1}{q-1}$. Do toga je momenta digao već $2000 . \frac{q^{15}-1}{q-1}$, pa u tom istom

momentu ima pravo na još $\frac{2000}{q^{15}} \cdot \frac{q^{30}-1}{q-1} - 2000\frac{q^{15}-1}{q-1}$ ili na $\frac{2000}{q-1} \cdot \frac{q^{15}-1}{q^{15}}$. Budući da tu svotu želi — prema zadatku — dići ne u 15. godini nego u 16., narast će mu ta svota na $\frac{2000}{q^{15}} \cdot \frac{q^{15}-1}{q-1} \cdot q = \frac{2000}{q^{15}} \cdot \frac{q^{15}-1}{q-1} = 2312{\cdot}62$ *D.*

356. **Netko ulaže 300 D kroz 20 godina, da si osigura godišnju rentu, koja će početi 10 godina iza posljednje uplate, a trajat će 15 godina. Koliku će rentu dobivati, ako se računa 5%?**
Nađi konačne vrijednosti uložaka i renta, pa to izjednači (upotrijebi pravac za olakšicu) t. j.
$300\frac{q^{20}-1}{q-1}q^{24} = x\frac{q^{15}-1}{q-1}$ ili $x = 300\frac{q^{20}-1}{q^{15}-1} = 1482{\cdot}6$ *D.*

357. **Netko ima pravo uživati rentu od 400 D kroz 15 godina. Tu rentu, koja dospijeva koncem godine, želi prodati, prije negoli je počne uživati. Po što će je prodati, ako se kamate računaju 3%?**
$x = 400\frac{q^{15}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{15}} = 4775$ *D.*

358. **U nekoj radničkoj naseobini može si svaki radnik kupiti kuću na taj način, da kroz 20 godina plaća početkom godine 200 D. Koliko bi radnik morao za kuću platiti, kad bi je htio isplatiti odmah, ako se kamate računaju 4%?**
Sadanja vrijednost $C = \frac{200}{q^{19}} \cdot \frac{q^{20}-1}{q-1} = 2762{\cdot}44$ *D.*

359. **Godišnja se renta 1200 D, koja dospijeva koncem godine, a traje 10 godina, ima pretvoriti u drugu, koja dospijeva početkom godine, a traje 12 godina. Kolika je nova renta, ako se računa 4%?**
Nađi jednoj i drugoj renti sadašnju vrijednost, pa ih izjednači, t. j.
$1200 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{10}} = x\frac{q^{12}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{11}}$ ili $x = 1200 \cdot q\frac{q^{10}-1}{q^{12}-1}$.
$x = 997{\cdot}2$ *D.*

360. **Glavnica 5800 D uložena je uz 4½% 10 godina. Koliko bi se moralo dodavati koncem svake godine, da se glavnica podvostruči?**
$5800q^{10} + r\frac{q^{10}-1}{q-1} = 2.5800.$ $r = 231{\cdot}94$ *D.*

361. **Dug od 5800 D otplaćuje se anuitetom od 700 D. Kolik je ostatak duga nakon 6 godina, i kada će se amortizirati, ako se računa 5%?**
$5800q^{6} - 700\frac{q^{6}-1}{q-1} = d$ (dug) $= 3011{\cdot}3$ *D*; $n = 10{\cdot}96$ *god.*

362. **U nekoj je šumi bilo prije 16 godina 25.000 m³ drva. Koliko se m³ posjeklo svake godine, ako sada ima 30.000 m³, a godišnji je prirast šume 5½%?**
Siječe se koncem godine $25000q^{16} - r\frac{q^{16}-1}{q-1} = 30000$; $r = \frac{28880.0{\cdot}055}{1{\cdot}3555} = 1171{\cdot}8\ m^3$.

363. **Netko uloži u banku 5.600 D uz 5%, a na koncu 10. godine počne ulagati svake godine 200 D. Ako mu banka kod rente računa 3¾%, kolik ima imutak nakon 30 godina, otkako je uložio onih 5600 D?**
$5600 \cdot 1{\cdot}05^{30} + 200\frac{q^{20}-1}{q-1} = x = 30007$ *D.*

364. **A posudi B-u 25.000 D uz 4½%, da može nakon 10 godina dobivati od njega kroz 8 godina godišnju rentu. Kolika je ta renta?**
Rentu počinje dizati početkom 11. godine.
$25000 \cdot q^{17} = r\frac{q^{8}-1}{q-1}.$ $r = 5632{\cdot}5$ *D.*

365. **S koliko anuiteta možemo amortizirati zajam od 10.000 D uz 4·5%, ako je anuitet 768·70 D?**
$10000q^{n} = 768{\cdot}70\frac{q^{n}-1}{y-1}$; $n = 20$ *god.* t. j. *20* anuiteta.

366. **Netko ulaže kroz 15 godina početkom godine 400 D. Koliko ima koncem 15. godine, ako se kamate računaju 4%?**
$C_n = 400\frac{q^{15}-1}{q-1} \cdot q = 8330$ *D.*

367. **Netko uplaćuje svake treće godine u novčani zavod, koji ukamaćuje s 5½%, 500 D. Koliko će imati iza 10-te uplate?**
$C = 500 \cdot \frac{q^{30}-1}{q^{3}-1} = 11434$ *D.*

§ 13. INTEGRALNI RAČUN.

Integriraj :

368. $\int_0^1 3x\,dx.$ $\quad 3\int_0^1 x\,dx = \frac{3}{2}\Big|_0^1 x^2 = \frac{3}{2}.$

369. $\int_0^5 3x^2dx.$ $\quad 3\int_0^5 x^2dx = \Big|_0^5 x^3 = 125.$

370. $\int_a^b x^5dx.$ $\quad \frac{1}{6}\Big|_a^b x^6 = \frac{b^6-a^6}{6}.$

371. $\int_0^1 (2x^2+3x-1)dx.$ $\quad 2\int_0^1 x^2dx+3\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 dx = \frac{7}{6}.$

372 $\int(5-3x+5x^2+7x^3)\,dx.$ Integral sume jednak je sumi integrala. $5x-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{4}x^4.$

373. $\int\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{8}{x^5}\right)dx.$
Načini sumu integrala i predoči podintegralne funkcije kao potencije s negativnim eksponentima. — $=$
$= -\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^4}.$

374. $\int(2+5x)^2\,dx.$
Najprije obavi kvadriranje. $= 4x+10x^2+\frac{25}{3}x^3.$

375. $\int(2x+3x^2)^3\,dx.$
Najprije obavi kubiranje. $= 2x^4+\frac{36}{5}x^5+9x^6+\frac{27}{7}x^7.$

376. $\int_0^\pi \cos x\,dx.$ $\quad \Big|_0^\pi \sin x = \sin 180^0 - \sin 0^0 = 0.$

377. $\int\frac{dx}{x^2}.$ $\quad \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}.$

378. $\int_{x_1}^{x_2} -\frac{dx}{x^2}.$ $\quad \Big|_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1} = \frac{x_1-x_2}{x_1 x_2}.$

379. $\int_a^b\frac{dx}{x^3}.$ $\quad \int_a^b x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\Big|_a^b x^{-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{b^2-a^2}{2a^2b^2}.$

380. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x+2}}.$ $\quad 2\int_0^2\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx = 2\Big|_0^2\sqrt{x+2} = 2(2-\sqrt{2}).$

381. $\int_0^4\sqrt{x}\,dx.$ $\quad \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\Big|_0^4 x^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}.$

382. $\int\sqrt{x^3}dx.$ $\quad \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}.$

383. $\int 5\sqrt[3]{x^2}\,dx.$ $\quad 5\int x^{\frac{2}{3}}dx = 5.\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = 3x\sqrt[3]{x^2}.$

384. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}.$ $\quad \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\Big|_0^1 x^{\frac{1}{2}} = 2.$

385. $\int\frac{1}{\sqrt[4]{4x^3}}dx.$ $\quad \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x} = 2\sqrt{2}.\sqrt[4]{x}.$

386. $\int\frac{3\,dx}{4\sqrt[4]{x^7}}.$ $\quad \frac{3}{4}\int x^{-\frac{7}{4}}dx = -\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$

387. $\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

$\int(3x^2+2)x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\int x^{\frac{4}{3}}dx+2\int x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\sqrt[3]{x}\left(\frac{3}{7}x^2+2\right).$

388. Nađi ploštinu plohe, što je zatvara grana parabole $y=x^2$, odsječak na X—osi x_2-x_1 i ordinate na mjestima $x_1=3$, $x_2=4$.

$P = \int_3^4 x^2\,dx = \frac{37}{3}.$

389. Odredi pomoću integrala ploštinu lika omeđenoga pravcem $y=x+2$, osju apscisa i ordinatama na mjestima $x=0$ i $x=2$. Rezultat potvrdi planimetrijskim načinom.

$P = \int_0^2(x+2)dx = \int_0^2 x\,dx + 2\int_0^2 dx = 6.$ — Nađi ploštinu trapeza.

390. Nađi ploštinu trokuta, što ga zatvaraju koordinatne osi s pravcem $y=5x-10$.

$P = \frac{5}{2}\Big|_0^2 x^2 - 10\Big|_0^2 x = -10.$

391. Nađi ploštinu lika, što ga zatvaraju desna grana parabole $y = 2x^2 + 3x - 5$, i koordinatne osi u 4. kvadrantu.

$\int (2x^2 + 3x - 5)\,dx$. Da se nađe gornja granica integrala, treba naći, gdje parabola siječe pozitivnu X-os. Stavi zato u jednadžbu parabole $y = 0$. Dobit ćeš $x = 1$. Granice su dakle 0 i 1.

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x - 5)\,dx = \frac{4}{3}.$$

392. Odredi pomoću integrala ploštinu lika omeđena pravcem $y = -{}^3/_4 x + 3$, osju apscisa i ordinatama na mjestima $x = 1$ i $x = 5$. Rezultat potvrdi planimetrijskim načinom.

$$P = \int_1^5 (-{}^3/_4 x + 3)\,dx = -\frac{3}{4}\int_1^5 x\,dx + 3\int_1^5 dx = 3.$$

Nađi ploštinu trapeza.

393. Nađi ploštinu trokuta, što ga zatvaraju pravac $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$, X-os i ordinata na mjestu $x = 6$. Rezultat kontroliraj planimetrijskim načinom.

$$P = \int_3^6 \left(\frac{2}{3}x - 2\right) dx = 3.$$

394. Odredi ploštinu lika omeđena koordinatnim osima i desnom granom parabole $y = x^2 + 5x - 10$.

Desna grana siječe X-os u točki $A(\frac{3}{2}, 0)$, ako se uzme $\sqrt{65} = 8$. $P = \int_0^{1\cdot 5} (x^2 + 5x - 10)\,dx = -8\cdot 25.$

395. Nariši parabolu $y^2 = 9x$ i izračunaj ploštinu paraboličnoga segmenta, koji je omeđen lukom parabole i tetivom, koja prolazi koordinantnim ishodištem i točkom $M_0(4,6)$.

Krivulju riši pomoću točaka, koje imaju apscise 1 i 4. Nađi najprije ploštinu lika omeđenoga gornjom granom parabole, X-osi i ordinatom na mjestu $x = 4$, a onda odbij dobiveni trokut.

$$P = 3\int_0^4 \sqrt{x}\,dx - 12 = 4.$$

396. Zadane su krivulje $x^2 + y^2 = 144$, $y^2 = 18x$. Nađi ploštinu segmenta parabole omeđena spojnicom točaka, u kojima se zadane krivulje sijeku.

Sjecišta kruga i parabole imadu apscisu $x = 6$.

$$P = 2\int_0^6 \sqrt{18x}\,dx = 6\sqrt{2}\int_0^6 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 4\sqrt{2}\,\Big|_0^6 x\sqrt{x} = 48\sqrt{3}.$$

397. Nađi ploštinu paraboličnoga segmenta parabole $y^2 = \frac{\sqrt{5}}{4}x^2$, što ga zatvara tetiva kruga $x^2 + y^2 = 9$ povučena sjecištima tih krivulja.

Nađi ploštinu desne polovice segmenta i uzmi je dvostruko. Dakle: $P = 2.\frac{2}{3}xy$. Za x i y uvrsti koordinate desnoga sjecišta $M_0(2, \sqrt{5})$. $P = \frac{8}{3}\sqrt{5}$.

398. Nađi ploštinu onoga dijela parabole $y^2 = 2px$, što ga zatvaraju X-os, luk parabole i pozitivna ordinata na mjestu $x_1 = x$.

$$P = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{3}xy.$$

399. Nađi ploštinu paraboličnoga segmenta omeđenoga lukovima parabole $y^2 = 8x$, parametrom i tetivom paralelnom tomu parametru u udaljenosti $x = 6$.

$$P = 2\int_2^6 2\sqrt{2}\sqrt{x}\,dx = 4\sqrt{2}\int_0^6 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{32}{3}(3\sqrt{3} - 1).$$

Donja je granica 2, jer fokus ima udaljenost $\frac{p}{2}$, a to je ovdje 2.

400. Što znači integral $\int_1^3 \sqrt{2px}\,dx$ i kolika mu je vrijednost?

Znači ploštinu lika, što ga omeđuju gornja grana parabole $y^2 = 2px$, X-os i ordinate na mjestima $x = 1$, $x = 3$.

$$\int_1^3 \sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2p}.2}{3}\,\Big|_1^3 x\sqrt{x} = \frac{2}{3}(3\sqrt{6p} - \sqrt{2p}).$$

§ 14. KOMBINATORIKA.

401. Pokaži, da je $n! - (n-1)! = (n-1) . (n-1)!$
Stavi: $n! = n . (n-1)!$ i izluči zajednički faktor.

402. Na koliko načina (kojim poretkom) mogu sjediti 4 osobe jedna uz drugu? $4! = 24$.

403. Koliko ima 10-znamenkastih brojeva, u kojima se nijedna cifra ne ponavlja?
Permutacija od 10 elemenata, a jer 0 ne može stajati na najvišem mjestu, zato tih brojeva ima
$10! - 9! = 10 . 9! - 9! = 9!(10-1) = 9 . 9! = 3265920$.

404. Koja je permutacija ULETI od UTILE?
Sa UT ima 3! permutacija, sa UI ima 3!, sa ULT ima 2! sa ULI ima 2!; napokon slijedi ULETI t. j. *17. permutacija.*

405. Koje su permutacije 52413 i 15324 od 12345?
107. i *21. permutacija.*

406. Nađi 8. i 24. permutaciju od AMEN.
MANE, NEMA.

407. Načini 8. i 10. permutaciju od ATOM.
TAMO, TOMA.

408. Načini 10. permutaciju od riječi KILO i dobit ćeš ime mjesta na Dunavu. ILOK

409. Načini 23. permutaciju od riječi RADO i dobit ćeš ime željezničke stanice kraj Zagreba. ODRA.

410. Koje su permutacije od TAOC i OCAT od OTAC?
9., 6.

411. Koja je permutacija LUKA od KULA? — *15.*

412. Načini 15. permutaciju od RUMA i dobit ćeš ime rijeke u našoj državi. MURA.

413. Koje su permutacije RODA i ODAR od ODRA?
13. i *2.*

414. Koja je permutacija MATO od ATOM? *19.*

415. Koja je permutacija OMER i OREM od MORE?
8. i *10.*

416. Koja je permutacija ROMAN od NORMA ?—*58.*

417. Koliko elemenata trebaš, da od njih sastaviš 45 amba bez ponavljanja?
Stavi $\binom{n}{2} = 45$ ili $\frac{n(n-1)}{2} = 45$. Kad riješiš ovu kvadratnu jednadžbu, dobit ćeš $n = \frac{1}{2} \pm \frac{19}{2}$. Zadatku odgovara samo pozitivno rješenje $n = 10$.

418. Koliko se može nejednako označenih polja baciti s 2 kocke i koji su to brojevi?
$2!\binom{6}{2} = 30$, *12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56* i njihove permutacije: *21, 31, 41,* i t. d.

419. Na koliko se načina mogu 32 karte razdijeliti među 4 igrača? $\binom{32}{4} = 35960$.

420. U koliko se najviše točaka može sjeći 12 pravaca?
Po dva pravca daju jednu točku; dakle $\binom{n}{2}$.

421. Koliko se može pravaca položiti kroz 7 točaka, od kojih nijesu 3 točke u istom pravcu? $\binom{7}{2} = 21$.

422. U koliko se točaka siječe 15 pravaca, od kojih se 2 sijeku u točki A, a 5 u točki B?
Da nijedan pravac nije paralelan, bilo bi $\binom{15}{2}$ sjecišta. Kad bi ona 2 pravca bila paralelna, bilo bi $\binom{2}{2}$ sjecišta manje; kad bi onih 5 pravaca bilo paralelno, bilo bi $\binom{5}{2}$ sjecišta manje. Jer se pak 2 pravca sijeku u točki A, a onih 5 u točki B, bit će 2 sjecišta više negoli bi ih bilo, da su ti pravci paralelni. Prema tome ima sjecišta $\binom{15}{2} - \binom{2}{2} - \binom{5}{2} + 2 = 96$.

423. U koliko se točaka sijeku 13 pravaca, od kojih se 3 sijeku u točki A, a 4 pravca u točki B?
Da nijedan pravac nije paralelan, bilo bi $\binom{13}{2}$ sjecišta; kad bi ona 3 pravca bila paralelna, bilo bi sjecišta $\binom{3}{2}$ manje. Kad bi ona 4 pravca bila paralelna, bilo bi sjecišta $\binom{4}{2}$ manje. Jer se pak 3 pravca sijeku u jednoj točki A, a ona 4 u drugoj točki B, bit će

2 sjecišta više negoli bi ih bilo, da su oni pravci paralelni. Prema tome je broj sjecišta
$\binom{13}{2} - \binom{3}{2} - \binom{4}{2} + 2 = 71$.

424. **U koliko se točaka siječe 7 pravaca, od kojih su 3 paralelna?**
Da nema paralelnih pravaca, bilo bi $\binom{7}{2}$ sjecišta. Da ona 3 pravca nijesu paralelna, sjekla bi se u $\binom{3}{2}$ točaka. Sjecišta će dakle biti $\binom{7}{2} - \binom{3}{2} = 18$.

425. **U koliko se točaka siječe 10 pravaca, od kojih su 4 paralelna?**
Da nema paralelnih pravaca, bilo bi sjecišta $\binom{10}{2}$. Da ona 4 pravca nijesu paralelna, sjekli bi se u $\binom{4}{2}$ točaka. Broj svih sjecišta jest prema tome
$\binom{10}{2} - \binom{4}{2} = 39$.

426. **Koliko se može načiniti kombinacija bez ponavljanja od elemenata 1, 2, 3, ... 8, 9?**
$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{9}{9} = 2\binom{10}{2} + 2\binom{10}{4} + 1 = 511$.

427. **U razredu ima 12 đaka. Na koliko načina može u jednoj klupi sjediti 4 đaka?**
Varijacija! $\binom{12}{4} \cdot 4! = 11880$.

428. **Koliko ima četveroznamenkastih brojeva, u kojima se ne ponavlja nijedna cifra?**
$\binom{10}{4} \cdot 4! =$ t. j. treba permutirati sve kombinacije 4. razreda. Među tima brojevima ima i takvih, koji se počinju s 0, pa u istinu nijesu 4-znamenkasti. Mora se dakle od gornjega broja odbiti $\binom{9}{3}$ 3! U svemu dakle ima traženih brojeva *4536*.

429. **Koliko se može načiniti 5-znamenkastih brojeva s ciframa 0, 1, ... 9, u kojima se ne ponavlja nijedna cifra?**
Varijacija! Svih brojeva, od kojih neki imaju 0 na početku ima $\binom{10}{5}$ 5! Jer su brojevi s 0 na početku 4-znamenkasti, a ima ih $\binom{9}{4}$, bit će svih 5-znamenkastih brojeva $\binom{10}{5}\, 5! - \binom{9}{4}\, 4! = 27216$.

430. **Koliko se dade načiniti 7-znamenkastih brojeva od cifri 0 do 9, a da ni u jednom broju ne dolazi ista cifra dvaput?**
Varijacija! $\binom{10}{7} \cdot 7! - \binom{9}{6}\, 6! = 9^2 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 = 544320$.

431. **Nađi 5. član razvoja $(2x+3y)^7$.**
$a_5 = \binom{7}{4} (2x)^3 (3y)^4 = 22680x^3y^4$.

432. **Razvij $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^5$.** $89\sqrt{3} - 109\sqrt{2}$.

433. **Razvij pomoću binomnoga poučka $\frac{(1+2i)^4-(1-2i)^4}{2}$.**
$= -24i$.

434. **Razvij pomoću binomnoga poučka**
$(2+2\sqrt{2})^5 - (2+2\sqrt{2})^3$. $1256 + 888\sqrt{2}$.

435. **Razvij pomoću binomnoga poučka $(1+i)^4-(1-i)^4$.** 0.

436. **Razvij pomoću binomnoga poučka $1{\cdot}05^7$ na 5 sigurnih decimala.**
$1{\cdot}05^7 = (1+5.10^{-2})^7$. Razvi toliko članova (5), da više ne utječu na 5. decimalno mjesto. Šesti je član $0{\cdot}000000109$. Dakle: $1{\cdot}05^7 = 1{\cdot}40710$.

437. **Izračunaj pomoću binomnoga poučka $1{\cdot}03^7$ točno na 4 decimale.**
$1{\cdot}03^7 = (1+3{\cdot}10^{-2})^7$. Uzmi 4 člana. $1{\cdot}03^7 = 1{\cdot}2298$.

438. **Riješi pomoću binomnoga poučka jednadžbu $(x+6)^5 - (x-6)^5 = 19932$.**
$60x^4 + 20.6^3x^2 + 2.6^5 = 19932$ ili
$x^4 + 72x^2 - 73 = 0$. $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{73}$.

439. **Nađi 7. član u razvoju $(1+x)^{10}$.**
$a_7 = \binom{10}{6} x^6 = 210x^6$.

440. **Nađi 7. član u razvoju $\sqrt[10]{1+x}$.**
$(1+x)^{\frac{1}{10}}$. Binomni poučak vrijedi i onda, kad je eksponent razlomak.
$$a_7 = \binom{\frac{1}{10}}{6} x^6 = -\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{10}\cdot\frac{29}{10}\cdot\frac{39}{10}\cdot\frac{49}{10}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} x^6 = -0{\cdot}0133686x^6.$$

441. U razvoju $\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{1}{\sqrt{5x^3}}\right)^p$ ima 3. član oblik $a.\frac{1}{x^4}$. Kolik mora biti eksponenat p i kolik mora biti a?

$\binom{p}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{p-2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5x^3}}\right)^2 = a.x^{-4}$; $a = \frac{p(p-1)}{2}.3^{-\frac{p-2}{2}}.5^{-1}$; $x^{-\frac{p-2}{2}} = x^{-4}$. Odatle: $p = 4$, $a = \frac{2}{5}$.

442. Koji član razvoja $(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[7]{x^3})^{11}$ ima oblik ax^6? kolik je a?

Osmi član: $a_8 = \binom{11}{7} = \binom{11}{4} = 330.$

443. Ako sumu od dva broja uzmeš na 6. potenciju, bit će u razvoju 3. član 2160, a 5. član 4860. Koji su to brojevi?

3. član potencije $(x+y)^6$ jest $\binom{6}{2}x^4y^2$, a 5. član $\binom{6}{4}x^2y^4$. Dobivene jednadžbe međusobno podijeli. Dobit ćeš $\frac{x^2}{y^2}=\frac{36}{81}$ ili $x=\pm\frac{2}{3}y$. Odatle $x = 2$, $y = \pm 3$.

444. Na koliko bi načina mogao izvaditi iz 3 žare — od kojih su u svakoj brojevi 1 do 9, a iz svake vadim po jedan broj — takve brojeve, da bude suma izvađenih brojeva 8, ako izvađene brojeve ne stavljam natrag?

Na 5 načina t. j. mogao bih izvući brojeve *116, 125, 134, 224, 233.*

445. U dvije su žare stavljeni brojevi i to u svakoj brojevi 1 do 9. Ako vadim iz svake žare po jedan broj i izvučene brojeve ne stavljam natrag u žare, koliko bi puta mogao izvaditi dva broja, kojih je suma 8?

4 puta t. j. *17, 26, 35, 44.*

§ 15. RAČUN VJEROJATNOSTI.

446. Koja je vjerojatnost, da ću s jednom kockom baciti broj 3? $v = \frac{1}{6}$.

447. Kolika je vjerojatnost, da ću bacivši dva novca po 10 para dobiti na obima „pismo"?

Pismo jednoga novca može se kombinirati s „pismom" ili s „glavom" drugoga; isto vrijedi i za „glavu" onoga novca. Mogućih je dakle slučajeva 4.

$v = \frac{1}{4}$.

448. Kolika je vjerojatnost, da ću između 32 karte jedne igre izvući jedan as?

$v = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

449. U dvije su vrećice brojevi i to u svakoj 1, 2, 3,.. 9, 10. Kolika je vjerojatnost, da ću izvući lijevom i desnom rukom najedamput jednaki broj?

$v = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

450. Kolika je vjerojatnost, da se između 5 izvučenih brojeva male lutrije (od 90 brojeva) nalazi neka izvjesna amba?

$v = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801}$.

451. Koja je vjerojatnost, da ću s dvije kocke baciti a) dva jednaka broja? b) sumu 6? c) sumu 3?

a) $v = \frac{1}{6}$, b) $v = \frac{5}{36}$, c) $v = \frac{1}{18}$.

452. U žari ima 20 jednakih kuglica, od koji je 15 bijelih, a 5 crnih. Kolika je vjerojatnost, da ću izvući a) jednu crnu kuglicu? b) jednu bijelu kuglicu?

a) $v = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, b) $v = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

453. U žari ima 7 bijelih, 3 crne, 4 žute i 6 zelenih kuglica. Kolika je vjerojatnost, da ću izvući a) jednu bijelu? b) jednu crnu? c) jednu žutu? d) jednu zelenu kuglicu?

a) $v = \frac{7}{20}$, b) $v = \frac{3}{20}$, c) $v = \frac{1}{5}$, d) $v = \frac{3}{10}$.

454. Kolika je vjerojatnost, da se između 5 izvučenih brojeva male lutrije (koja sastoji od 90 brojeva) nalazi terna 345?

$v = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748}$. Povoljnih ima naime slučajeva toliko, koliko se tri broja 3, 4, 5 mogu kombinirati u kvinternu s preostalim brojevima, kojih ima 87.

455. **U dvije su vrećice brojevi, i to u svakoj 1, 2, 3, ... 11, 12. Kolika je vjerojatnost, da ću lijevom i desnom rukom izvući dva taka broja?**
$v = \frac{6^2}{12^2} = \frac{1}{4}$ (svaki naime taki broj jedne vrećice može doći u kombinaciju sa 6 takih brojeva druge vrećice).

456. **Kolika je vjerojatnost, da će između 5 izvučenih brojeva male lutrije (koja se sastoji od 90 brojeva) biti izvučen broj 35 (uniona)?**
Broj mogućih slučajeva jest $\binom{90}{5}$, a broj povoljnih slučajeva jest $\binom{89}{4}$, jer uz broj 35 dolaze kombinacije 4. razreda ostalih 89 brojeva. Dakle: $v = \binom{89}{4} : \binom{90}{5} = \frac{1}{18}$. Ista je vjerojatnost i makar za koji drugi broj!

457. **Ako stavim na lutriju (kod svakoga se vučenja izvuče između 90 brojeva samo 5 brojeva) dvije ambe, koje se sastoje od različitih brojeva, kolika je vjerojatnost, da ću dobiti?**
Neka prvu ambu sačinjavaju brojevi 1 i 2, a drugu 3 i 4. Vučenja, među kojima su brojevi 1 i 2, a ne 3 i 4, ima $\binom{88}{3}$ — 86. Među vučenjima $\binom{88}{3}$ ima naime i takvih, koji sadržaju i 3 i 4; takvih pak ima $\binom{86}{1}$ = 86. Vučenja, među kojima su brojevi 3 i 4, a ne 1 i 2, ima s istoga razloga $\binom{88}{3}$ — 86. Osim tih vučenja ima i takvih, koja sadržaju sva 4 broja, pa su to povoljni slučajevi. Takvih vučenja ima $\binom{86}{1}$ = 86. Broj povoljnih vučenja jest prema tome $2\left[\binom{88}{3} - 86\right] + 86 = 219386$. Broj mogućih vučenja jest $\binom{90}{5} = 43949268$. Vjerojatnost je dakle: $v = \frac{219386}{43949268} = 0{\cdot}00499...$

458. **U žari ima 8 bijelih, 6 crvenih, 4 modre i 2 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost, da ću izvući jednu crvenu ili jednu modru kuglicu?**
$v = v_1 + v_2$; $v_1 = \frac{6}{20}$, $v_2 = \frac{4}{20}$, $v = \frac{1}{4}$.

459. **Kolika je vjerojatnost, da ću s 3 kocke baciti taki zbroj?**
Svaki se broj jedne kocke može kombinirati sa svakim brojem ostalih kocaka. Broj povoljnih slučajeva jest: 112, 114, 116, 125, 134, 136, 145, 156, 222, 224, 226, 233, 235, 244, 246, 255, 266, 334, 336, 345, 356, 444, 446, 455, 466, 556, 666. U svemu ima povoljnih slučajeva p = 28. Dakle $v = \frac{28}{6^3} = \frac{7}{54}$.

460. **U žari ima 90 brojeva, a svaki se put vadi 5 brojeva. Zgoditak dobiva onaj, čiji se broj izvuče. Ako netko kupi 20 srećaka (t. j. 20 brojeva), kolika je vjerojatnost, da će dobiti jedan zgoditak?**
Broj mogućih slučajeva jest $\binom{90}{5}$. Broj nepovoljnih slučajeva izračunat ćeš jednostavnije pomoću protivne vjerojatnosti. Taj je $\binom{90-20}{5}$ Dakle $v' = \frac{184518}{665898} = 0{\cdot}27$. Prema $v = 1 - v'$ dobivaš: $v = 0{\cdot}73$.

461. **Kolika je vjerojatnost, da ću iz 3 igre s 32 karte izvući 3 kralja?**
Vjerojatnost „i—i"! Broj mogućih slučajeva jest 32^3, a broj povoljnih 4^3. $v = \frac{4^3}{32^3} = \frac{1}{512}$.

462. **U žari ima 100 kuglica, i to 30 crnih, 50 crvenih i 20 bijelih. Kolika je vjerojatnost, da ću triput po redu izvući jednu crvenu kuglicu, a) ako svaki put stavim kuglicu natrag u žaru, b) ako kuglice ne stavljam natrag?**
a) $v = v_1^3 = \left(\frac{50}{100}\right)^3 = \frac{1}{8}$, b) $v = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} = \frac{4}{33}$.

463. **Kod kockanja s 2 kocke dobiva nagradu 18 D onaj, koji baci na svakoj kocki broj 6. Koliko će se morati platiti za jedno bacanje?**
Vjerojatnost je $\frac{1}{6^2}$; uložak (t. j. cijena jednoga bacanja) mora biti jednak matematičkoj nadi. Dakle $x = \frac{1}{6^2} \cdot 18 = 0{\cdot}5$ *D.*

464. **U žari ima 15 bijelih i 10 crnih kuglica. Tko izvuče 1 bijelu kuglicu, dobiva 10 D, a tko izvuče 1 crnu kuglicu, gubi 10 D. Koliko stoji svako vučenje?**
Jer uložak (cijena) mora da bude jednak matematičkoj nadi, bit će: $x = \frac{15}{25} \cdot 10 - \frac{10}{25} 10 = 2\,D$.

465. **A i B bacaju dvije kocke, a igru dobiva onaj, koji s obadvije kocke u jedan mah baci sumu 8. Ako A uloži 5 D, koliko mora uložiti B?**
Nada od A jest: $\frac{5}{36} \cdot x$, a nada od B-a jest $5\left(1 - \frac{5}{36}\right)$. To dvoje izjednači. Dobit ćeš: $x = 31$, t. j. B mora uložiti *31 D*.

466. **A se kladi s B-om za 180 D, da će s jednom kockom baciti u 2 maha sumu 10. B tvrdi protivno. Koliko mora novaca položiti A, a koliko B?**
U ovom je slučaju s jednom kockom bacati dvaput isto kao i s dvije kocke baciti jedamput. A ima vjerojatnost $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, a B $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. Ulošci x i y moraju biti proporcionalni s vjerojatnošću dobitka. Zato mora biti: $x : y = \frac{1}{12} : \frac{11}{12}$, a u drugu ruku $x + y = 180$. Te dvije jednadžbe daju $x = 15\,D$, $y = 165\,D$.

467. **A će dobiti 100 D, ako s dvije kocke baci tak broj (t. j. zbroj svih točaka na izbačenim poljima ima biti tak). Za koliko može B prenesti to pravo na sebe?**
$N = 100 \cdot v$. Broj je mogućih događaja 6^2, a broj povoljnih jest 12. Prema tome $N = 100 \cdot \frac{12}{6^2} = 33{\cdot}33\,D$.

468. **A se kladi s B-om, da će s dvije kocke baciti paš (t. j. dva jednaka broja) i uloži 10 D. Koliko mora uložiti B i koliko će dobiti onaj, koji dobije okladu?**
Ulošci moraju biti razmjerni s vjerojatnostima dobitka. Vjerojatnost od A jest $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, a vjerojatnost od B-a jest ovoj protivna t. j. $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Dakle: $10 : x = \frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ ili $10 : x = 1 : 5$; $x = 50\,D$ (toliko mora uložiti B). *Tko okladu dobije, dobiva 60 D.*

469. **Žara sadrži 5 bijelih kuglica, 3 crvene i 2 modre. Ako triput zaredom izvučem 1 crvenu kuglicu, a da izvađene ne stavljam natrag u žaru, dobit ću 100 D. Koliko mi vrijedi matematička nada?**
Događaji zavise jedan o drugomu, pa će biti ova sastavljena vjerojatnost: $v = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$.
$N = \frac{1}{120} \cdot 100 = 0{\cdot}83\,D$.

470. **Netko stavi na dva broja male lutrije (90 brojeva) 1 D, pa će dobiti 270 D, ako izađu oba njegova broja. Kolika je njegova matematička nada?**
$v = \frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801}$; $N = \frac{2}{801} \cdot 270 = \frac{60}{89} = 0{\cdot}67\,D$. Da lutrija ne računa na svoju dobit, morala bi nada biti jednaka 1 D, jer je i uložak tolik.

471. **Da se proda neka stvar putem srećaka, izdano je 300 srećaka. Kolika je vjerojatnost, da će stvar dobiti onaj, koji je kupio 7 srećaka?**
Broj mogućih slučajeva jest 300, a broj povoljnih (za onoga, koji ima 7 srećaka) 7. Dakle $v = \frac{7}{300}$.

472. **U lutriji od 100 srećaka ima 1 zgoditak od 300 D, 5 zgoditaka od 150 D, 15 zgoditaka od 75 D, 20 zgoditaka od 25 D i 59 zgoditaka od 10 D. Koliko smije stajati jedna srećka?**
Cijena x srećke jednaka je matematičkoj nadi igrača. Ako se nada na prvi zgoditak označi s n_1, na drugi s n_2, i t. d. mora biti $x = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = \frac{1}{100} \cdot 300 + \frac{5}{100} \cdot 150 + \frac{15}{100} \cdot 75 + \frac{20}{100} \cdot 25 + \frac{59}{100} \cdot 10 = 32{\cdot}65$ D.

16. POLITIČKA ARITMETIKA.*

473. **Kolika je vjerojatnost života a) 30-, b) 40-, c) 50-godišnje osobe?**

---

* Kod ovih su zadataka primijenjene dvije tablice o pomoru otisnute u školskoj knjizi Hočevar-Varićak: Aritmetika za VII. i VIII. razred srednjih škola, Zagreb 1919.

$v = \frac{l_{n+1}}{l_n}$. Primjeni II. tablicu (škol. knjiga str. 79.)

a) $v = \frac{l_{31}}{l_{30}} = \frac{908}{916} = 0{\cdot}991$; b) $v = \frac{l_{41}}{l_{40}} = \frac{819}{829} = 0{\cdot}988$;

c) $v = \frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{705}{718} = 0{\cdot}982$.

474. **U pređašnjem zadatku nađi vjerojatnost smrti.**
$v' = 1 - \frac{l_{n+1}}{l_n}$; a) $v' = 1 - 0{\cdot}991 = 0{\cdot}009$,
b) $v' = 1 - 0{\cdot}988 = 0{\cdot}012$, c) $v' = 1 - 0{\cdot}982 = 0{\cdot}018$.

475. **Koliko umire muške djece, a koliko ženske u dobi između 10. i 11. godine?**
Primijeni I. tablicu (škol. knjiga str. 78.). Od 1000 muške djece rođene iste godine navrši 10. godinu 621, a 11. godinu 618. Između 10. i 11. godine umire ih dakle $621 - 618 = 3$. Ženske djece umire u toj dobi $652 - 649 = 3$.

476. **Koliku vjerojatnost ima osoba od 41 godine, da će navršiti 61. godinu?**
Primijeni II. tablicu. $v = \frac{l_{61}}{l_{41}} = \frac{539}{819} = 0{\cdot}658$.

477. **Kolika je vjerojatnost, da će brat i sestra živjeti još 15 godina, ako je njemu 40 godina, a njoj 35?**
$v = v_1 \, . \, v_2$ (vjerojatnost „i—i"). Primijeni I. tablicu. Vjerojatnost brata: $v_1 = \frac{l_{55}}{l_{40}} = \frac{365}{488}$. Vjerojatnost sestre: $v_2 = \frac{l_{50}}{l_{35}} = \frac{452}{547}$. $v = \frac{365}{488} \cdot \frac{452}{547} = 0{\cdot}618$ (nađeno pomoću logaritama!).

478. **Kolika je vjerojatnost, da će 50-godišnji muž biti iza 20 godina na životu, a 45-godišnja žena da ne će biti na životu?**
$v = v_1\,(1 - v_2)$; $v_1 = \frac{l_{70}}{l_{50}} = \frac{178}{412}$, $v_2 = \frac{l_{65}}{l_{45}} = \frac{297}{485}$;
$v = \frac{178}{412} \cdot \frac{485 - 297}{485} = \frac{89 \, . \, 94}{103 \, . \, 485} = 0{\cdot}167$.

479. **Kolika je vjerojatnost, da 50-godišnji muž ne će biti iza 20 godina na životu, a 45-godišnja žena da će još živjeti?**
$v_1 = 1 - \frac{178}{412} = \frac{117}{206}$ (vjerojatnost smrti), $v_2 = \frac{297}{485}$:
$v = v_1 \, . \, v_2 = \frac{117}{206} \cdot \frac{297}{485} = 0{\cdot}348$.

480. **Kolika je vjerojatnost, da iza 20 godina ne bude ni 50-godišnjega muža ni 45-godišnje žene više na životu?**
$v_1 = 1 - \frac{178}{412} = \frac{117}{206}$, $v_2 = 1 - \frac{297}{485} = \frac{188}{485}$.
$v = v_1 \, . \, v_2 = \frac{117}{206} \cdot \frac{188}{485} = 0{\cdot}220$.

481. **U I. tablici pomora odgovara veličini l_{60} broj 311. Kojoj veličini l_{60+x} odgovara broj 303? (Interpolacija tablice).**
Iza 311 slijedi u tablici broj 248, koji odgovara veličini l_{65}. Za 5 godina je diferencija $D = 311 - 248$, a za 1 godinu diferencija $\frac{311-248}{5}$. Prema tome za x godina je diferencija $\frac{311-248}{5} \, . \, x$. Ta diferencija ima biti jednaka $\triangle = 311 - 303$. Dakle
$\frac{311-248}{5} x = 311 - 303$ ili $\frac{63}{5} x = 7$. Odatle izlazi $x = 0{\cdot}\dot{5}$. Broju 303 pripada dakle godina $60 + 0{\cdot}\dot{5} = 60{\cdot}56$. — P r a v i l o. Ako D znači diferenciju susjednih brojeva u tablici (brojeva l_n i l_{n+5}), a $\triangle$ diferenciju prvoga većega broja u tablici i zadanoga broja, onda je x u l_{n+x} jednak: $x = 5 . \frac{\triangle}{D}$.

482. **Nađi, koliko ženskih osoba (od 1000) ostaje na životu nakon 43 godine.**
U tablici toga broja (43) nema, nego se mora interpolirati. Veličini l_{40} pripada broj 516, a veličini l_{45} broj 485. Za 5 godina je difencija $D = 516 - 485$, za jednu godinu $\frac{516 - 485}{5}$, a za 3 jest $\frac{516 - 485}{5} \, . \, 3 = 18{\cdot}6 = 19$. Ovaj broj odbi od 516, pa ćeš dobiti $l_{43} = 497$.
P r a v i l o. Ako n znači jedinice godina (kojih u tablici nema), a D diferenciju susjednih brojeva (koja otpada na 5 godina), onda je $\triangle = \frac{D}{5} n$. Taj se broj odbije od prvoga većega broja, koji pripada desetici zadana broja.

483. **Koliko je vjerojatno trajanje života muškarca od 41 g.?**
$l_{n+x} = \frac{l_n}{2}$, gdje n znači dobu osobe (ovdje 41). Interpolacijom I. tablice dobit ćeš $l_{41} = 488 - \triangle$. Po pra-

vilu u prećašnjem zadatku dobit ćeš $\triangle = \frac{488-453}{5} . 1 = 7$. Dakle : $l_{41} = 481$. Sada potraži, kojim godinama odgovara broj $\frac{l_{41}}{2} = 240·5$. Taj broj leži između brojeva 248 i 178, koji pripadaju godinama 65 i 70. Po pravilu u zadatku 481. dobit ćeš $x = 0·54$. — Vjerojatno je dakle, da će 41-godišnja osoba doživjeti *65·5.* godinu t. j. da će živjeti još *24·5* godine.

484. **Koliko je vjerojatno trajanje života muškarca od 36 godina?**
Postupak kao u prećašnjem zadatku. $n = 64·4$ godina t. j. ta će osoba vjerojatno živjeti još *28·4* godina.

485. **Odredi srednje trajanje života (Mn) 5-godišnje djevojčice.**
$M_5 = \frac{1}{2} + \frac{l_6 + l_7 + \cdots + l_{95}}{l_5}$. Zbrajanjem pripadnih brojeva u I. tablici dobit ćeš : $l_6 + l_7 + \ldots + l_{10} = 3306$, $l_{11} + l_{12} + \ldots + l_{20} = 6368$; $l_{21} + l_{22} + \ldots + l_{95} = 2.l_{20} + + 5(l_{25} + l_{30} + l_{35} + \ldots + l_{90} + l_{95}) = 24751$. (Uputu vidi u škol. knjizi str. 81.). $M_5 = 0·5 + \frac{3306 + 6368 + 24751}{681}$.
$M_5 = 0·5 + \frac{34425}{681} = 51·05$ Djevojčica će još živjeti *51·05* godina.

486. **Kolik iznos (mizu) mora 30-godišnja osoba platiti osiguravajućem zavodu, da iza 20 godina, ako toliko poživi, dobije 25000 D uz pretpostavku, da se kamate računaju 6% i da zavod traži 15% od uplaćene svote za pokriće troškova.**
l_{30} osoba plate zavodu odmah $x . l_{30}$ D, a sadašnja je vrijednost svote, koju zavod ima isplatiti l_{30+20} osobama : $25000 . \frac{l_{50}}{q^{20}}$. Kad ove izraze izjednačiš, dobit ćeš: $x = \frac{l_{50}}{l_{30}} . \frac{25000}{q^{20}}$. Pomoću II. tablice dobit ćeš : $x = \frac{718}{916} . \frac{25000}{1·06^{20}} = 6110 D$. Za troškove mora dotična osoba platiti još $\frac{6110.15}{100} = 916·50$ *D.*

487. **Analogan zadatak za 41-godišnju osobu, koja želi iza 15 godina dobiti 10000 D.**

$x = \frac{l_{56}}{l_{41}} . \frac{10000}{1·06^{15}} = \frac{631}{819} . \frac{10000}{1·06^{15}} = 3207·50$ *D.* U ime troškova mora još platiti *481·13 D.*

488. **Koju mizu treba da plati 40-godišnja osoba, da po svojoj smrti osigura nasljednicima svotu od 20000 D? Uzima se 4%.**
$x = c. \frac{q^{n-1}}{l_n} (S_n - q . S_{n+1})$. Vidi uputu u škol. knjizi str. 83. $x = 20000 \frac{1·04^{39}}{829} (3447 - 1·04.3235) =$
$= 20000 \frac{1·04^{39}}{829} . 82·60 = 9199·20$ *D.*

489. Analogan zadatak za 50-godišnju osobu, koja želi nasljednicima po smrti osigurati 8000 D (uz 4%).
$x = 8000 \frac{1·04^{49}}{l_{50}} (S_{50} - 1·04. S_{51}) = 8000. \frac{1·04^{49}}{718} . 63·56 =$
$= 4839·10$ *D.*

490. **Koliku godišnju premiju ima da plaća osoba, kojoj su 42 godine, želi li nasljednicima po smrti osigurati svotu od 16000 D (uz 4%).**
$x = \frac{c}{q} . \frac{S_n - q. S_{n+1}}{S_n}$. Vidi uputu u škol. knjizi str. 84.
$x = \frac{16000}{1·04} . \frac{S_{42} - 1·04 . S_{43}}{S_{42}} = \frac{16000}{1·04} . \frac{76·20}{3035} = 386·26$ *D.*

491. **Nađi sadašnju vrijednost doživotne rente od godišnjih 2000 D, koja se osobi od 43 godine isplaćuje na kraju svake godine (uz 4%).**
$x = r . \frac{q^n}{l_n} . S_{n+1}$. Vidi škol. knjigu str. 85.
$x = 2000 \frac{1·04^{43}}{l_{43}} . S_{44} = 35987$ *D.*

492. **35-godišnja osoba ima pravo da diže sve do svoje smrti na kraju svake godine rentu od 1000 D, pa to pravo želi prodati. Koliko će zato tražiti, ako se kamate računaju 4%?**
Pita se sadanja vrijednost x doživotne rente.
$x = r. \frac{q^n}{l_n} . S_{n+1}$; $x = 1000 \frac{1·04^{35}}{l_{35}} . S_{36} = 19788$ *D.*

GEOMETRIJA

§ 17. PLANIMETRIJA.

493. Suma kutova n-terokuta iznosi 540^0; kolik je n?
$n.180—360=540$; $180n=900$; $2n=10$;
$n=5$. *t. j. peterokut.*

494. Kateta pravokutnog trokuta ima 15 cm; kolika je druga kateta, ako je ona za 3 cm manja od hipotenuze?
Ako a znači hipotenuzu, izlazi po Pitag. poučku:
$a^2=(a—3)^2+15^2$, $a^2=a^2—6a+9+225$, $6a=234$,
$a=39$; druga kateta ima *36 cm.*

495. Hipotenuza pravokut. trokuta ima 13 cm, a jedna kateta 5 cm. Koliki su odsječci p i q na hipotenuzi, kad se spusti na nju visina?
Kvadrat katete jednak je produktu hipotenuze i projekcije druge katete. $p=\frac{25}{13}=1\cdot92=$ *1·9 cm,*
$q=a—p=11\cdot08=$ *11·1 cm.*

496. Koji mnogokut ima 5 puta više dijagonala negoli stranica?
Broj dijagonala jest $\frac{(n—3)\,n}{2}$. Dakle $\frac{(n—3)\,n}{2}=5n$.
Skrativši s n i pomnoživši jednadžbu s 2 dobit ćeš: $n=13$. Dakle: *13-kut.*

497. Ako u istokračnom pravokutnom trokutu povećaš krakove za 4 cm, povećat će se njegova ploština za 112. Koliki su kraci?
Kateta neka je označena s x. Ploštine su $p=\frac{x^2}{2}$ i
$p'=\frac{(x+4)^2}{2}$, $p'—p=112$ ili $\frac{(x+4)^2}{2}—\frac{x^2}{2}=112$,
$x^2+8x+16—x^2=224$, $8x=208$; $x=26$.

498. **U dva slična trokuta poznate su homologne stranice $a = 6$, $a' = 4$. Ako se povuku na te stranice težišnice, bit će težišnica, koja pripada stranici a za $b = 3$ cm dulja od težišnice, koja pripada stranici a'. Kolike su težišnice?**
Trokute nariši jedan u drugom sa jednim zajedničkim vrhom. Iz poučka o pramenu izlazi (ako je x kraća težišnica): $(a+b) : x = a : a'$, $a'x + a'b = ax$, $x(a-a') = a'b$, $x = \frac{a'b}{a-a'} = \frac{4 \cdot 3}{6-4} = 6$ *cm*. Jedna težišnica ima *9 cm*, druga *6 cm*.

499. **U trokutu su poznate stranice $a = 8$ *cm*; $b = 6$ *cm*. Za koliko je dulja visina spuštena na stranicu b od visine spuštene na stranicu a, ako je kraća visina $v_a = 4$ cm?**
Pokaži najprije, da su visine obrnuto razmjerne sa pripadnim stranicama t. j. da je $v_a : v_b = b : a$. Neka je dulja visina $v_b = v_a + x$. Iz ovoga razmjera slijedi: $v_a : (v_a + x) = b : a$ ili $x = v_a \frac{a-b}{b}$; $x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ *cm*.

500. **Dva trokuta imaju istu bazu, a njihove su ploštine $P_1 = 16$ cm², $P_2 = 20$ cm². Ako je visina većega trokuta veća za $l = 3{\cdot}5$ *cm* od visine manjega trokuta, kolike su visine?**
Osnovica neka je a, a visine neka su v i $v+l$.
$P_1 = \frac{av}{2}$, $P_2 = \frac{a(v+l)}{2}$ ili $av = 2P_1$, $a(v+l) = 2P_2$.
Podijelivši 2. jednadžbu s 1. dobit ćeš $\frac{v+l}{v} = \frac{P_2}{P_1}$ ili $P_1 v + P_1 l = P_2 v$, a odatle: $v(P_2 - P_1) = P_1 l$ ili $v = \frac{P_1}{P_2 - P_1} \cdot l = \frac{16}{4} \cdot 3{\cdot}5 = 14$; druga je visina *17·5 cm*.

501. **Kad bi se oko ekvatora Zemlje načinio željezni obruč i s njime se koncentrički položio u ravnini ekvatora drugi obruč, koji je načinjen iz željeznog komada *10 m* dužega negoli je komad, od kojega je načinjen prvi obruč, bi li se mogao između tih obruča provući čovjek?**
Opseg prvoga obruča je $2R\pi$, a drugoga $2(R+x)\pi$

(polumjer je drugoga obruča $R+x$). Njihova je diferencija *10 m*. Dakle: $2(R+x)\pi - 2R\pi = 10$, $(R+x)\pi - R\pi = 5$; $R\pi + x\pi - R\pi = 5$, $x = \frac{5}{\pi} = 1{\cdot}59$ *m*. Između tih obruča mogao bi se provući čovjek niska stasa.

502. **U krugu se sijeku dvije tetive. Odsjeci na jednoj tetivi su $a = 8$ cm, $b = 12$ cm. Na drugoj je tetivi jedan odsječak dug $c = 8^3/_4$ cm; kako je duga druga tetiva?**
Stavak o potenciji točke s obzirom na krug kaže, da su produkti odsječaka na istim tetivama jednaki t. j. $ab = cd$, gdje d znači nepoznati odsječak na drugoj tetivi. Prema tome $d = \frac{ab}{c} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 4}{35}$; $d = 10{\cdot}97$. Čitava je tetiva duga $10{\cdot}97 + 8{\cdot}75 = 19{\cdot}7$ *cm*.

503. **Tangenta i sekanta kruga sijeku se u točki A, a sekanta siječe krug u točkama B i C; dotačište je tangente D. Ako je tangenta AD za 2 cm manja od sekante AC, a za 1·5 cm veća od vanjskoga odsječka AB na sekanti, kolika je tangenta AD?**
Iz poučka o potenciji točke s obzirom na krug izlazi: $x^2 = (x+2)(x - \frac{3}{2})$ ili $x^2 = x^2 + 2x - \frac{3}{2}x - 3$, $\frac{x}{2} = 3$, $x = 6$ *cm*.

504. **U rombu se dijagonale razlikuju za *10 cm*. Ako kraću dijagonalu produljiš za *2* cm, a dužu prikratiš za *4* cm, ne će se promijeniti ploštine romba. Kolike su dijagonale?**
$P = \frac{d_1 d_2}{2}$. Ako je jedna dijagonala x, druga je $x+10$; dakle $P = \frac{x(x+10)}{2}$. Nakon promjene dijagonala bit će: $P = \frac{(x+2)(x+10-4)}{2}$. Dakle: $\frac{x(x+10)}{2} = \frac{(x+2)(x+6)}{2}$ ili $2x = 12$; $x = 6$. *Dijagonale su 6 i 16 cm.*

505. **Kolika je površina istostraničnoga trokuta, ako je poznat polumjer njemu opisanoga kruga $r = 6$ cm?**
$r = \frac{a^3}{4P}$; $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Uvršteno daje: $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ili

$a = r\sqrt{3}$. Prema $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ jest $P = \frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$. $P = 27\sqrt{3}$.

506. Kolik je polumjer kružnoga isječka, koji ima ploštinu $6{\cdot}45\pi$ i centrički kut $\alpha = 32^0 15'$?

$\alpha = 32{\cdot}25^0$. Prema $P = \frac{\alpha r^2\pi}{360}$ dobit ćeš: $r = 6\sqrt{2}$.

507. Nađi ploštinu istostrana trokuta, ako je zadana suma stranice i visine $a + v = 7$ cm.

$v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; dakle $a + \frac{a}{2}\sqrt{3} = 7$ ili $a = \frac{14}{2+\sqrt{3}}$;

$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 49\ (7\sqrt{3} - 12) = 5{\cdot}39\ cm^2$.

508. Razdijeli krug polumjera $r = 4$ cm u 3 jednaka dijela pomoću krugova, koji su sa zadanim koncentrični. Koliki su polumjeri pomoćnih krugova i kako se odnose?

$r_1^2\pi = \frac{1}{3}r^2\pi$; $r_2^2\pi = \frac{2}{3}r^2\pi$; $r_1 = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $r_2 = r\sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$; $r : r_2 : r_1 = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}$.

509. Trapez visine $v = 6$ cm ima paralelne stranice $a = 10$ cm, $b = 6$ cm. Nađi dužinu prušca, koji je paralelan s *a* i *b*, a dijeli trapez u dva jednaka dijela.

Pružac označi s y; on dijeli visinu u dijelove x i (v — x). Trapez se raspada u dva jednaka trapeza (prema pretpostavci). Izrazi jednom jednadžbom, da je ploština zadanoga trapeza jednaka sumi ploština nastalih trapeza. Drugom jednadžbom izrazi, da su ploštine nastalih trapeza jednake. Dakle:

$\frac{(a+b)\,v}{2} = \frac{(b+y)\,x}{2} + \frac{(a+y)\,(v-x)}{2}$; $\frac{(b+y)\,x}{2} = \frac{(a+y)\,(v-x)}{2}$.

Odatle $y = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\sqrt{17}\ cm$.

510. Zadana je ploština pravilnoga 10-kuta $P = 1\ m^2$. Kolik je polumjer opisanoga kruga i kolika je stranica 10-kuta?

$P = 5.\ s_{10}.\varrho = 1$; $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, $\varrho = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_{10}}{2}\right)^2} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Uvrštenjem u prvu jednadžbu dobit

ćeš: $r^2 = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ ili racionaliziranjem

$r = \frac{1}{5}\sqrt{50+10\sqrt{5}} = 0{\cdot}583\ m$. $s_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).\ 0{\cdot}583 = 0{\cdot}360\ m$.

511. Visina pravokutnoga trokuta spuštena na hipotenuzu ima projekcije $p = 12{\cdot}8$, $q = 7{\cdot}2$. Kolika je ploština P trokuta i polumjer ϱ njemu upisana kruga?

Primijeni svojstvo pravokut. trokuta (visina na hipotenuzi je srednja geometr. proporcionala između projekcija kateta). Jer je baza trokuta $= p + q$, a visina $v = \sqrt{pq}$, slijedi $P = \frac{p+q}{2}\sqrt{pq} = 96$; $\varrho = \frac{P}{s}$, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{p+q}}{2}(\sqrt{p+q} + \sqrt{p} + \sqrt{q})$.

$\varrho = \frac{\sqrt{(p+q)\,.\,pq}}{\sqrt{p+q}+\sqrt{p}+\sqrt{q}} = 4$.

512. Visina $v = 9{\cdot}6$ cm spuštena na hipotenuzu dijeli ovu u dva odreska tako, da je $p - q = 5{\cdot}6$ cm. Kolik je polumjer *r* trokutu opisanoga kruga?

Riješi jednadžbe $pq = 92{\cdot}16$, $p - q = 5{\cdot}6$. Dobit ćeš $p = 12{\cdot}8$, $q = 7{\cdot}2$. Jer je *r* jednak polovici hipotenuze, bit će $r = \frac{p+q}{2} = 10\ cm$.

513. U trokutu je poznata hipotenuza $c = 14$ cm i kateta $a = 8{\cdot}4$ cm. Kolike su ploštine trokuta, u koje se zadani trokut raspada, kad se u njemu spusti visina na hipotenuzu?

Primijeni $v^2 = p.\ q$; $P_1 = \frac{a^3}{2c^2}\sqrt{c^2-a^2} = 4{\cdot}25\ cm^2$;

$P_2 = \frac{a(c^2-a^2)}{2\,c^2}\sqrt{c^2-a^2} = 7{\cdot}56\ cm^2$.

514. U trokutu spuštena je visina $v = 7{\cdot}2$ cm na hipotenuzu; projekcija katete *b* jest $q = 9{\cdot}6$ cm. Kolike su stranice trokuta?

Iz $v^2 = p.\ q$ slijedi $p = \frac{v^2}{q}$; iz $c = p + q$ slijedi $c = \frac{v^2+q^2}{q}$; iz $a^2 = p.\ c$ i iz $b^2 = q.\ c$ slijedi:

$a = \frac{v}{q}\sqrt{v^2+q^2}$, $b = \sqrt{v^2+q^2}$; $a = 9$, $b = 12$, $c = 15\ cm$.

515. **Visina spuštena na hipotenuzu rastavlja trokut u dva pravokutna trokuta. Kako se odnose ploštine nastalih trokuta, ako je hipotenuza zadanoga trokuta $c = 5$ cm, a kateta $a = 3$ cm?**
Ploštine se sličnih trokuta odnose kao kvadrati homolognih stranica. Dakle: $P_1 : P_2 = a^2 : b^2$ ili $P_1 : P_2 = a^2 : (c^2 - a^2)$; $P_1 : P_2 = 9 : 16$.

516. **U trokutu su poznate stranice $a = 13$, $b = 15$ i ploština $P = 24$. Kolika je treća stranica?**
Upotrijebi Heronovu formulu. $c = 4$. Ostale vrijednosti ne zadovoljavaju.

517. **Kolik je polumjer opisana i upisana kruga u trokut, koji ima stranice $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$?**
Izračunaj najprije ploštinu P trokuta iz Heronove formule. $P = 24$; $r = \frac{abc}{4P} = 8$; $\varrho = \frac{P}{s} = 1\cdot5$.

518. **Na krug polumjera $r = 8$ cm ima se povući tangenta iz točke P, koja je od periferije kruga udaljena $d = 9$ cm. Ako je dotačište kruga označeno s A, a njegovo središte s O, kolika je dužina AP (t. j. tangenta) i koliko je udaljeno (q) nožište B visine spuštene iz A od središta O?**
d leži na pravcu OP. Primijeni svojstvo pramena i kruga, t. j. $\overline{AP}^2 = d(d + 2r)$; $AP = 15$ cm. $\overline{AO}^2 = (r+d)q$ ili $q = \frac{r^2}{r+d} = \frac{64}{17} = 3\cdot76$ cm.

519. **Izvan kruga polumjera $r = 10$ cm leži točka A, koja ima daljinu od središta kruga $d = 12$ cm. Ako se iz A povuče na krug ona sekanta, kojoj je daljina od središta kruga $v = 8$ cm i kad se središte kruga spoji s onim sjecištem sekante, koje je od A udaljenije, dobit će se trokut. Kolika je ploština toga trokuta?**
Primijeni svojstvo pramena, kojega presijeca krug.
$P = \frac{v}{2}\left[\sqrt{r^2 - v^2} + \sqrt{r^2 - v^2 + d(2r+d)}\right] =$
$= 8\,(3 + \sqrt{105}) = 106$ cm².

520. **Dva pravokutnika jednake visine imaju sumu svojih opsega $2s = 64$ cm, a ploštine im se odnose kao $p : r = 2 : 3$. Ako se opsezi tih pravokutnika odnose kao $m : n = 7 : 9$, kolike su im osnovice i kolika im je visina?**
Označi osnovice s a i a', a visinu s b. Dobit ćeš 3 jednadžbe: $(a+b) : (a'+b) = m : n$, $a : a' = p : r$, $a + a' + 2b = s$. $a = p\frac{s\,(n-m)}{(r-p)\,(m+n)} = 8$ cm, $a' = r\frac{s\,(n-m)}{(r-p)\,(m+n)} = 12$, $b = s\frac{mr - np}{(r-p)\,(m+n)} = 6$ cm.

521. **Iz jezera strši šaš $v = 1$ m visoko. Ako se vrh šaša položi u ravninu površine vode, bit će vrh šaša udaljen od svoga prijašnjega položaja $h = 3$ m. Kako je duboko (d) jezero? Pri tom se uzima, da se šaš nije svinuo u luk.**
Korijen šaša je središte O kruga, koji ima polumjer $d + v$. Gdje krug siječe niveau vode, tamo je točka A (kamo je došao nagnut vrh šaša). Načini dijametar u vertikalnom smjeru i načini pravokutan trokut s vrhom u A. U zadatku je dakle dana visina h na hipotenuzu i projekcija v kraće katete.
$d = \frac{h^2 - v^2}{2v} = 4$ m.

§ 18. STEREOMETRIJA.

522. **Oplošje je kugle $O = 165$ cm². Koliko je ploština P dijagonalnoga presjeka kocke upisane u kuglu?**
Ako r znači polumjer kugle, d dijagonalu kockine baze, a a njezinu stranicu, tada je $P = a.\,d$. Dijagonala D kocke ujedno je dijametar kugle, pa je $D = a\sqrt{3} = 2r$ ili $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Iz pravokutnoga se trokuta razabira: $d^2 = D^2 - a^2$ ili $d^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{O}{\pi}$, kad se r izrazi s O.
$P = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot O\,.\,\pi = 24\cdot76$ cm².

523. **Nađi visinu v kalote, koja pripada kugli voluma $V = 4500\,.\,\pi$ cm³, ako kalota ima oplošje $P = 270\pi$ cm².**
Iz $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ izrazi r i uvrsti u $P = 2rv\pi$, pa nađi v. $v = \frac{P}{\sqrt[3]{6\pi^2 V}} = 9$ cm.

524. Zadano je oplošje kugle $O=400\pi$ i opseg $2s=8\pi$ baze uspravnoga stošca upisana u tu kuglu. Kolik je plašt stošca?

$2s = 2\varrho\pi$ ili $\varrho = \frac{s}{\pi}$; stranicu a izračunaj pomoću svojstva pravokut. trokuta povukavši dijametar kroz vrh stošca. Dobit ćeš $a^2 = 2r(r+x)$, $x = \pm\frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi O-4s^2}$.
Iz $4r^2\pi = O$ slijedi $r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{O\pi}$. Plašt P stošca jest:
$P = \frac{s}{2\pi}\sqrt{2O\pi \pm 2\sqrt{O\pi(\pi O-4s^2)}} = 8\pi\sqrt{50\pm 15\sqrt{11}}$.

525. Dijagonalni prerez kocke i glavni krug kugle imaju jednaku ploštinu. Kako se odnose volumi te kocke i kugle?

Baza kocke neka ima stranicu a i dijagonalu d. Prerez = d . a = $a^2\sqrt{2}$. Dakle $a^2\sqrt{2} = r^2\pi$. Dijagonala kocke jest $2r = a\sqrt{3}$ ili $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Volum kocke $V_1 = a^3$, volum kugle $V_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{a^3}{8}\cdot 3\sqrt{3}\pi = \frac{a^3}{2}\sqrt{3}\pi$; $V_1 : V_2 = 2 : \sqrt{3}\pi$.

526. Jedna ravnina siječe uspravan stožac voluma $V = \frac{200\pi}{3}$ dm³ paralelno s bazom u udaljenosti $a=3$ dm od nje. Druga ravnina paralelna s prvom siječe stožac u udaljenosti od prve ravnine $b=2$ dm. Kolik je volum nastaloga krnjeg stošca između tih ravnina, ako ima karakterističan presjek (p) zadanoga stošca površinu 40 dm²?

$V = \frac{r^2\pi}{3}\cdot v$; $p = r\cdot v$. Te jednadžbe daju $r = \frac{3V}{p\pi}$;
$v = \frac{p^2\pi}{3V}$; $r : r_1 = v : (v-a)$ daje $r_1 = \frac{3V}{p^3\pi^2}(p^2\pi - 3aV)$;
$r_1 : r_2 = (v-a) : (v-a-b)$ daje $r_2 = r_1\frac{v-a-b}{v-a}$;
$r_1 = \frac{15}{8}$; $r_2 = \frac{9}{8}$; $v = 8$. Volum traženoga tijela jest:
$V_1 = \frac{b\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{147}{32}\pi$ *dm*³.

527. Kolik je brid a oktaedra, ako je njegova najdulja os s za $p=4$ veća od njegova brida?

Polovica oktaedra čini pravilnu 4-stranu piramidu visine $\frac{s}{2}$. Polovica dijagonale baze te piramide, brid a i visina $\frac{s}{2}$ zatvaraju pravokut. trokut, iz kojega ćeš

dobiti $s^2 = 2a^2$, a jer je prema zadatku $s = a + p$, slijedi $a^2 - 2ap - p^2 = 0$ ili $a = p(1+\sqrt{2}) = 9{\cdot}66$. Negativno rješenje od a ne odgovara zadatku.

528. U kocki brida $a=10$ cm izrezana je najveća kugla. Koliko je oplošje O i volum V preostaloga tijela?

$O = 6a^2 + a^2\pi = a^2(6+\pi) = 914{\cdot}16$ *cm*²;
$V = a^3 - \frac{a^3\pi}{6} = \frac{a^3}{6}(6-\pi) = 476{\cdot}4$ *cm*³.

529. Izračunaj oplošje tijela, koje nastane, kad se pravokutan trokut s kutovima 30° i 60° vrti oko osi vrtnje tako, da je kraća kateta na njoj okomita, a vrh kuta od 60° da leži u osi vrtnje. Hipotenuza trokuta neka je $a=10$ cm.

Nastaje valjak, iz kojega je izrezan stožac iste baze i iste visine, koju ima valjak. Oplošje tijela = jednoj bazi valjka + plašt valjka + plašt stošca, t. j.
$O = \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{2}\sqrt{3} + \frac{a^2\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}(3+2\sqrt{3}) = 507{\cdot}45$ *cm*².

530. Nađi oplošje i volum isječka uspravnoga kružnog valjka, ako je polumjer valjka $r=10$ cm, visina $v = 14$ cm, centrični kut $\alpha = 25^0$.

Tijelo je omeđeno s 2 jednake plohe ploštine rv, oblom plohom, kojoj je, kad se razvije, baza $l = \frac{\alpha r\pi}{180}$, a visina v, i s 2 isječka ploštine $\frac{\alpha r^2\pi}{360}$.
Prema tome je $O = \frac{\alpha r\pi}{180}(r+v) + 2rv = 384{\cdot}72$ *cm*².
$V = \frac{\alpha r^2\pi}{360}\cdot v = 305{\cdot}432$ *cm*³.

531. Kolika je površina kugline kapice, koja se može pregledati s najvišega vrha Ivančice v = 1060 m, ako je polumjer Zemlje r = 6370 km?

Visinu v' kalote dobit ćeš primijenivši svojstvo katete r t. j. $(r-v')(r+v) = r^2$. Odatle:
$v' = \frac{rv}{r+v}$; $O = 2r\pi v' = 2r^2\pi\frac{v}{r+v} = 4514$ *km*².

532. Nađi volum 10-strane pravilne prizme, ako je poznat osnovni brid $s=5$ cm i visina prizme $v=10$ cm.

Baza $P = 10\cdot\frac{s\cdot\varrho}{2}$, $\varrho^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$, $s = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$;

dakle: $\varrho = \frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $P = \frac{5}{2}s^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; $V = = \frac{5}{2}s^2v\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 1925\ cm^3$.

533. Pravilan 6-kut stranice s = 6 dm rotira oko jedne svoje stranice. Kolik je volum tijela, koji rotacijom nastane i koliko stane u nj vode?
Nastalo tijelo sastoji se iz dva jednaka krnja stošca, s polumjerima $R = \sqrt{3}\,.\,s$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}s$, u kojima su izdubeni stošci polumjera $r = \frac{\sqrt{3}}{2}s$; visina je svih stožaca $\frac{s}{2}$. Nastalo tijelo sastoji se još od valjka polumjera $\sqrt{3}s$ i visine s. $V = \frac{7s^3\pi}{4} - \frac{s^3\pi}{4} + 3s^3\pi = \frac{9}{2}s^3\pi = 2035{\cdot}74\ dm^3 = 2035{\cdot}4\ l$.

534. Karakterističan paralelogram kosoga valjka (presjek duž osi i najveće izvodnice) jest romb s kutom $\alpha = 60^0$. Kolik je polumjer baze i kolika je visina valjka, ako mu je volum $V = 3050{\cdot}50\ dm^3$?
Visina v valjka jest stranica pravokutnoga trokuta s hipotenuzom $2r$ i katetom r; dakle $v = r\sqrt{3}$. S obzirom na tu relaciju izlazi iz $V = r^2\pi\,.\,v$
$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{3}\cdot\pi}} = 8{\cdot}25\ dm$, $v = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} = 14{\cdot}28\ dm$.

535. U uspravnu prizmu osnovnih bridova $a = 25$, $b = 52$, $c = 63$ i visine $v = 30$ upisan je valjak. Nađi oplošja i volume tih tjelesa.
$O_p = 2P + (a+b+c)v = 2(P + s.v)$, gdje P znači ploštinu baze prizme, a s polovicu opsega te baze. Polumjer baze valjka jest $\varrho = \frac{P}{s}$ (krug upisan u trokut!) $O_v = 2\pi\frac{P}{s}\left(\frac{P}{s}+v\right)$. $O_p = 5460$, $O_v = 702\pi$; $V_p = P.v = 18900$, $V_v = \frac{P^2}{s^2}\pi v = 2430\pi$.

536. Dužina a, širina b i visina c pravokutnoga paralelepipeda odnose se kao m : n : p. Ako je suma tih dimenzija $s = 90$, a $m = 4$, $n = 3$, $p = 2$, kolike su te dimenzije?

$a + b + c = s$, $a : b : c = m : n : p$. Odatle: $a : m = b : n$, $b : n = c : p$, $c : p = a : m$. Ako se stavi $b : n = c : p = a : m = q$, dobit ćeš: $a = mq$, $b = nq$, $c = pq$, a kad se ove 3 jednadžbe zbroje, dobit ćeš: $s = q(m+n+p)$ ili $q = \frac{s}{m+n+p} = 10$; $a = 40$, $b = 30$, $c = 20$.

537. U kojem su omjeru oplošja uspravna valjka i uspravnoga stošca, koji ima s valjkom zajedničku bazu i visinu, ako je poznat polumjer baze r = 8 cm i ako je poznata ploština karakterističnoga trokuta stošca k = 160 cm² ?
$k = rv$, $v = \frac{k}{r}$; $O_v = 2r\pi(r+v) = 2\pi(r^2+k)$, $O_s = r\pi(r+s) = \pi(r^2+\sqrt{k^2+r^4})$; $O_v : O_s = 2(r^2+k) : (r^2+\sqrt{k^2+r^4})$, $O_v : O_s = 224 : 118{\cdot}45$.

538. Baza uspravnoga valjka upisana je pravilnom peterokutu stranice $s_5 = 12$ cm, a karakterističan presjek toga valjka ima ploštinu $p = 180$ cm². Koliko je oplošje valjka?
$p = 2\varrho v$, $\varrho^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$. r izrazi pomoću relacije $s = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Dobit ćeš: $\varrho = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; $v = \frac{p}{s}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$; $O = \pi\left[\frac{s^2}{10}(5+2\sqrt{5}+p\right] = 2191{\cdot}91\ cm^2$.

539. Baza uspravne piramide jest istostraničan trokut upisan u krug površine $K = 100$ cm². Ako je visina piramide jednaka trostrukom polumjeru rečenoga kruga, koliko je oplošje piramide?
Polumjer kruga jednak je $\frac{2}{3}$ visine trokuta. Otuda $r^2 = \frac{a^2}{3}$. Iz $r^2\pi = K$ slijedi $a^2 = \frac{3K}{\pi}$; baza je piramide $B = \frac{3K}{4\pi}\sqrt{3}$. Visina jedne pobočke v' dobiva se iz pravokut. trokuta, kojemu su katete $v = 3r$ i $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Jedna pobočka jest $p = \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{37}{3}} = \frac{3K}{4\pi\sqrt{3}}\sqrt{37} = \frac{\sqrt{3}K}{4\pi}\sqrt{37}$.
$O = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}K(1+\sqrt{37}) = \frac{75\sqrt{3}}{\pi}(1+\sqrt{37})\ cm^2$.

540. **Uspravan stožac i valjak imaju zajedničku bazu $B = 16$ cm² i zajedničku visinu. Ako je oplošje valjka $O = 160$ cm², kolik je volum tih tjelesa i koliko je oplošje stošca?**
$O_v = 2B + 2r\pi v$, a jer je $r = \sqrt{\frac{B}{\pi}}$, slijedi $v = \frac{1}{2}\frac{O - 2B}{\sqrt{B\pi}}$; $V_v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{\pi}}(O - 2B) = \mathit{143{\cdot}36}\ cm^3$; $V_s = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{B}{\pi}}(O - 2B) = \mathit{47{\cdot}79}\ cm^3$; $O_s = r\pi(r + s)$, $s^2 = v^2 + \frac{B}{\pi} = \frac{O^2 + 8B^2 - 4BO}{4B\pi}$, $O_s = B + \frac{O^2 + 8B^2 - 4BO}{2} = 16(1 + \sqrt{17}) = \mathit{81{\cdot}92}\ cm^2$.

541. **Kvadratna krnja piramida ima donju bazu $B = 12{\cdot}96$ cm², gornju bazu $b = 5{\cdot}76$ cm², ploštinu jedne pobočke $p = 22{\cdot}5$ cm². Koliko je oplošje i volum krnje i cijele piramide?**
$O_{kr.} = B + b + 4p = 108{\cdot}72$ cm², Nađi visinu v' pobočke, a zatim iz pravokut. trokuta visinu v piramide. $v' = \frac{2p}{\sqrt{B} + \sqrt{b}}$ (jer je ploština trapeza $p = \frac{A + a}{2} . v'$, $A = \sqrt{B}$, $a = \sqrt{b}$); $v^2 = \frac{2p}{\sqrt{B} + \sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2}{4}$; $v = \mathit{7{\cdot}47}\ cm$. $V_{kr.} = \frac{v}{3}(B + \sqrt{Bb} + \sqrt{b}) = \mathit{68{\cdot}126}\ cm^3$. Visina dopunjka piramide jest $x = v\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = 14{\cdot}94$ cm. Oplošje čitave piramide jest $O_č = \mathit{174{\cdot}96}\ cm^2$, a volum $V_č = \mathit{96{\cdot}811}\ cm^3$.

542. **Kuglin isječak, čijoj kaloti pripada stranica $s = 2$, dio je kugle polumjera $r = 3$. Kako se odnose volumi kuglina isječka i onoga stošca, koji ima vrh u središtu kugle, a osnovka mu je najveći krug kalote?**
Da nađeš polumjer ϱ najvećega kruga kalote, nacrtaj u kugli dijametar i nad njim pravokutan trokut s katetom *s*, pa primijeni svojstvo pravokutnoga trokuta t. j. $s^2 = 2rv$. Odatle: $v = \frac{s^2}{2r}$. To uvrsti u $\varrho^2 = s^2 - v^2$. Dobit ćeš: $\varrho^2 = s^2 - \frac{s^4}{4r^2}$; $V_i = \frac{s^2\pi r}{3}$, $V_v = \frac{\pi s^2}{24r^3}(4r^2 - s^2)(2r^2 - s^2)$; $V_i : V_v = 8r^4 : (8r^4 - 6r^2s^2 + s^4) = \mathit{81:56}$.

543. **Oko uspravne trostrane prizme osnovnih bridova $a = 11$ cm, $b = 13$ cm, $c = 20$ cm i visine $v = \frac{65}{3}$ cm opisan je valjak iste visine. Koliko je oplošje valjka?**
$r = \frac{abc}{4P}$, P izračunaj po Heronovoj formuli.
$O = \mathit{668}\ cm^2$.

544. **Zadano je oplošje uspravnoga stošca $O = 121$ cm² i omjer izvodnice i polumjera osnovke $s : r = 8 : 3$. Kolik je polumjer osnovke i kolika je izvodnica?**
Riješi $O = r\pi(r + s)$ i $\frac{s}{r} = \frac{8}{3}$ po r i s. $r = \sqrt{\frac{33}{\pi}}$, $s = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{33}{\pi}}$.

545. **Nađi volum pravilne trostrane prizme opisane uspravnom valjku voluma $V_v = 90\pi$.**
Polumjer baze valjka jednak je trećini visine baze piramide, a jer je $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, slijedi $\varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Iz voluma valjka nađi visinu valjka i uvrsti u $V_p = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} . v$.
$V_p = \frac{3}{2\pi}\sqrt{3} . V_v = 135\sqrt{3}$.

546. **Nađi volum pravilne trostrane prizme upisane u uspravan valjak, kojemu je volum $V_1 = 400$ cm³.**
Polumjer valjka neka je r, a stranica osnovnoga brida prizme neka je a. Opisan krug ima središte u težištu trokuta, pa je stoga $r = \frac{2}{3}v$ (v = visina trokuta) ili $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Iz $V_1 = r^2\pi . v$ i $V = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} . v$ dobit ćeš: $V = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. $V_1 = \mathit{173{\cdot}205}\ cm^3$.

547. **Dijagonalni prerez kocke ima ploštinu $p = 25$ cm²; koliko je oplošje kocke?**
Ako je a brid kocke, a d dijagonala baze, onda je $p = a . d = a^2\sqrt{2}$ ili $6p = O . \sqrt{2}$, $O = 3\sqrt{2} . p = 75 . \sqrt{2}\ cm^2$.

548. **Kako se odnose oplošja kocke i piramide, kojoj je baza jedna kockina pobočka, a vrh joj je u središtu suprotne kockine pobočke?**
Iz pravokutnoga trokuta — što ga čine brid piramide b, visina piramide a (brid kocke) i polovica dijagonale kockine baze, — izračunaj b, a zatim

visinu v' jedne pobočke piramide. $v' = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Oplošje je piramide $O_p = a^2(1+\sqrt{5})$, oplošje kocke $O_K = 6a^2$. Dakle: $O_K : O_p = 6 : (1+\sqrt{5})$.

549. **U kocki brida $a = 20$ cm upisan je stožac. Kolika je ploština prereza P stošca, ako je taj prerez normalan na os stošca i od baze udaljen $\frac{a}{2}$ cm?**
Baza stošca ima polumjer $\frac{a}{2}$. Baza i prerez odnose se kao kvadrati udaljenosti od vrha. $P = \frac{a^2\pi}{16} = 25\pi\ cm^2$.

550. **Izvodnica (stranica) uspravnoga stošca, visine $v = 6$ cm, zatvara s bazom kut $\alpha = 60^0$. Kolik je volum stošca i njemu opisane kugle?**
Karakteristični prerez stošca jest istostraničan trokut. Ako s znači izvodnicu, onda je $\frac{s}{2}$ polumjer stoščeve baze (u pravokut. trokutu, koji ima jedan kut 60^0, manja je kateta jednaka polovici hipotenuze). Iz $v = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ slijedi $\frac{s}{2} = \frac{v}{\sqrt{3}}$ i $V_s = \frac{v^3\pi}{9} = 24\pi\, cm^3$.
Da nađeš polumjer opisane kugle, upotpuni visinu stošca na dijametar i primijeni svojstvo pravokut. trokuta (kateta je srednja geom. proporcijonala između hipotenuze i projekcije te katete). $s^2 = 2r.v$; odatle s obzirom na $s = \frac{2v}{\sqrt{3}}$ slijedi $r = \frac{2}{3}v$. $V_k = \frac{4.8}{3.27}v^3\pi = 256\pi\ cm^3$.

RAVNA TRIGONOMETRIJA.

§ 19. PRAVOKUTAN TROKUT.

551. **Opseg pravokutnoga trokuta jest $p = 24$ m, a njegova ploština $P = 24\,m^2$. Kolike su stranice i kutovi?**
Ako je a hipotenuza, slijedi: $b = a.\cos\beta$, $c = a.\sin\beta$. Dakle: $a(1+\sin\beta+\cos\beta) = p$, $a^2\sin\beta.\cos\beta = 2P$. Prvu jednadžbu kvadriraj i pojednostavni pomoću druge. Dobivenu jednadžbu podijeli s prvom, pa nađi a. $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$, $\beta = 53^0 7' 47''$, $\gamma = 36^0 52' 13''$.

552. **Visina spuštena na hipotenuzu c jest 4 cm. Ako je $\alpha = 36^0 52' 30''$, kolika je hipotenuza?**
$v = b.\sin\alpha$, $b = c.\cos\alpha$; odatle: $c = \frac{v}{\sin\alpha.\cos\alpha} = \frac{2v}{\sin 2\alpha} = 8{\cdot}33\ cm$.

553. **U pravokutnom je trokutu hipotenuza $a = 8$ m; jedna je kateta od druge veća za 2 m. Kolike su stranice i kutovi trokuta?**
Katete neka su x i $x+2$, pa primijeni Pitagorin poučak. Kutovi su: $55^0 11'$ i $34^0 49'$. Katete su: $\sqrt{31}-1$, $\sqrt{31}+1$.

554. **Zadana je ploština pravokutnoga trokuta $P = 100$ i njegova hipotenuza $c = 10\sqrt{5}$. Razriješi trokut!**
$ab = 200$, $a^2+b^2 = 500$ (a i b su katete). $a = 20$, $b = 10$, $\alpha = 19^0\ 19'\ 48''$.

555. **Os kosoga stošca $a = 20$ m zatvara s bazom prikloni kut $\varphi = 54^0 35' 25''$. Kolik je volum stošca, ako je polumjer baze $r = 10$ m?**
$v = a.\sin\varphi$; $V = \frac{1}{3}r^2\pi.a.\sin\varphi = 1707{\cdot}041\ m^3$.

556. **U romb, koji ima šiljasti kut 60^0, upisan je krug ploštine $p = 100\,cm^2$. Kolika je ploština P romba?**
Dotačište dijeli stranicu romba u dva odreska x i y. Izračunaj ih i zbroji, da dobiješ stranicu.
$x = r.\cot g30^0$, $y = r.\cot g60^0$; $a = \frac{40}{\sqrt{3\pi}}$, $P = \frac{800}{\pi\sqrt{3}}$.

557. **Neka se kružnom isječku polumjera r i centričnoga kuta α upiše krug. Kolik je polumjer ϱ toga kruga?**
Hipotenuza dobivenoga pravokutnoga trokuta jest $r-\varrho$. Dobit ćeš: $\varrho = (r-\varrho).\sin\frac{\alpha}{2}$ ili $\varrho = r.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$.

558. **Točka izvan kruga udaljena je od njegova središta 15 cm. Kolika je dužina tangente iz te točke, ako tangenta zatvara sa spojnicom te točke i središta kruga kut $\alpha = 48^0 11' 56''$? Kolik je polumjer r kruga?**
Iz Pitagorina poučka slijedi $t^2 = 225 - r^2$; $r = 15.\sin\alpha$; $t = 10$, $r = 11{\cdot}18\ cm$.

559. Ako se iz točke izvan krugova, kojima se polumjeri odnose kao 2 : 1, povuku vanjske zajedničke tangente, bit će dužina tangente na veći krug 15·3 cm. Ako je periferija većega kruga 8π, kolika je ploština lika omeđena vanjskim tangentama i nutarnjim lukovima tih krugova?
Nađi ploštinu jednoga trapeza i od nje odbi kružne isječke krugova, a dobiveno uzmi dvostruko. Za isječak treba naći kut α tangente s centralom iz $tg\alpha = \frac{4}{15 \cdot 3}$, $\alpha = 14^0 39' 4 \cdot 7'' = 14 \cdot 6513^0$. *P = 17·56 cm²*.

560. Dva kruga polumjera $r_1 = 8$ cm $r_2 = 5$ cm imadu centralnu udaljenost $d = 17$ cm. Kolika je udaljenost sjecišta vanjskih zajedničkih tangenata od središta tih kružnica i kolik kut zatvaraju te tangente?
Pramen! $r_1 : r_2 = (d + x) : x$; tu x znači udaljenost sjecišta od središta manjega kruga.
$x = d . \frac{r_2}{r_1 - r_2} = 28\,^1/_3$; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{r_2}{x} = \frac{r_1 - r_2}{d} = \frac{3}{17}$;
$\varphi = 20^0 18' 10''$; Udaljenost je sjecišta tangenata od središta većega kruga *45 ¹/₃ cm*.

561. Da se izmjeri visina zvonika, izmjeri se „prividna njegova visina" u udaljenosti d od podnožišta zvonika. („Prividna je visina" vertikalnoga predmeta kut, što ga zatvara zraka doglednica vrha sa horizontalnom ravninom podnožja). Ako je $d = 50$ m, a prividna visina $\varphi = 32^0 7'$, kako je visok zvonik?
$v = d . tg\,\varphi =$ *31·39 m*.

562. Kolika je sjena d tornja visokoga 85 m, kad je visina Sunca $\varphi = 75^0 30'$?
$d = 85 . cotg\,\varphi =$ *21·98 m*.

563. Točki A leži nasuprot nepristupačna točka B. Ako se iz A odmjeri lijevo i desno dužina 8 m normalno na udaljenost AB i izmjeri u krajnoj točki C te dužine kut BCA = 55⁰, koliko su udaljene točke A i B?
U istokračnom je trokutu AB = d visina; d = AC . tg 55⁰ = *11·425 m*.

564. S mjesta 12 m udaljenoga od stupa, na kojem je kip, vidi se najniža točka kipa pod kutom elevacije $\alpha_1 = 33^0 41''$, a najviša pod kutom $\alpha_2 = 39^0 48''$. Kako je kip visok?
Iz pravokutnih ćeš trokuta dobiti (v je visina kipa, s visina stupa do kipa): $v + s = 12 tg\alpha_2$, $s = 12 tg\alpha_1$.
Odatle: $v = 12 . \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} = 1 \cdot 93\,m$.

565. Kolika je srednja udaljenost Mjeseca od Zemlje, ako je srednja paralaksa Mjeseca (kut, pod kojim bi se iz središta Mjesečeva vidio polumjer Zemlje) $p = 57'$, a polumjer R Zemlje ako je 6370 km?
$d = \frac{R}{\sin p}$; $\sin p = 57 . \frac{\pi}{180.60}$ (p se mora naime uzeti u lučnoj mjeri); dakle $d = 6370 . \frac{180.60}{57\pi} =$
$= 60 \cdot 31 . 6370 =$ *384183 km*.

566. Godišnja paralaksa (kut p, pod kojim bi se vidio s neke zvijezde polumjer zemaljske staze) zvijezde α Centauri jest 0·76". Kolika je daljina te zvijezde od Sunca, ako je polumjer zemaljske staze $R = 150.10^6$ km?
Načini istokračan trokut, kojemu je dijametar zemaljske staze baza, a zvijezda je u vrhu trokuta. Visina trokuta d (udaljenost zvijezde od Sunca) zatvara s krakom trokuta paralaksu. Podnožište visine neka je S (Sunce), pa će biti $d = R . cotg\,p = \frac{R}{tg\,p}$.
Jer je p malen kut, to je $tg\,p = p$ (tu treba da je p izražen u lučnoj mjeri); dakle $tg\,p = \frac{0 \cdot 76\pi}{180.3600}$;
$d = R . \frac{180.3600}{0 \cdot 76\pi} = 271400\,R =$ *40·71.10¹² km*.

567. Nađi dužinu polumjera paralele, na kojoj leži Varaždin ($46^0 18' 29''$ sjev. šir.) i dužinu jednoga stupnja te paralele. Polumjer zemlje R = 6370 km.
$r = R . \cos\varphi$; *r = 6215·6 km*; 1⁰ nađi pomoću $\frac{2r\pi}{360}$.
Dobit ćeš: 1⁰ = 108·483 km.

568. Koliko kilometara prevali u 1 sekundi Zagreb ($\varphi = 45^0 48' 54''$ sjev. šir.) radi rotacije Zemlje oko osi, ako je polumjer Zemlje R = 6370 km?

$r = R . \cos \varphi$, gdje r znači polumjer paralele Zagreba. U 24 sata prevali Zagreb put $2 r \pi$ t. j. $\frac{R \pi \cos \varphi}{12}$, a u 1 sekundi : $v = \frac{R \pi \cos \varphi}{12.3600} = 322 \cdot 87 \frac{m}{sek}$.

569. Na tornju su dva prozora, jedan nad drugim. Iz gornjega se vidi predmet P, koji ima daljinu od podnožja tornja $u = 600$ m, pod depresionim kutom $\psi = 8^{0} 59' 50''$, a iz donjega pod depresionim kutom $\varphi = 5^{0} 42' 38''$. Koliko je gornji prozor nad donjim? Razmak prozora neka je d, a visina donjega prozora od zemlje a. $d + a = u \operatorname{tg} \psi$, $a = u \operatorname{tg} \varphi$; $d = u(\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi) = 35\ m$.

570. S vrhunca brda vidi se selo pod kutom depresije $10^{0} 14'$. Ako se u selu ispali mužar, vidi se bljesak 12 sekunda prije negoli se čuje prasak. Kako je visoko vrhunac brda nad selom, ako zvuk prevali u 1 sekundi 333 m? Pravokutan trokut, kojemu je hipotenuza s. $s = 333.12 = 3996$ m. $v = s . \sin \delta = 710\ m$.

571. S aeroplana, koji je visoko nad zemljom 6 km, čini zraka doglednica, koja se tiče zemaljske površine, kut depresije (depresija horizonta) $\varphi = 2^{0} 30'$. Kolik je polumjer Zemlje?
$\cos \varphi = \frac{R}{R + v}$; $R = 6370\ km$.

572. Do koje geografske širine može gledati motrilac s aeroplana, koji je nad Zagrebom visoko 6 km, ako je geografska širina Zagreba $\varphi = 45^{0} 48' 54''$?
$\cos (\varphi - \varphi_1) = \frac{R}{R + v}$. Na vidiku mu je prostor između paralele geogr. širine $43^{0} 18' 54''$ i $48^{0} 18' 54''$; dakle n. pr. Mostar—Beč.

573. Pod kojim se kutom φ vidi (prividna visina) s tornja sv. Stjepana u Zagrebu (105 m) čovjek visok 1·25 m, koji stoji 100 m daleko od podnožišta tornja?
$\varphi = \alpha - \beta$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{105}{100}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{93 \cdot 75}{100}$, $\varphi = 3^{0} 14' 40''$.

574. Do koje bi sjev. širine vidio Zemlju motrilac s balona u visini $v = 12$ km nad sjev. polom, ako je zemaljski polumjer $R = 6370$ km?

Produženje zemaljske osi i zraka, koja Zemlju dotiče, zatvara kut, koji je jednak geogr. sjev. širini (okomični kuti). $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{R + v}$; $\varphi = 85^{0} 51'$.

575. Kako su daleko neprijateljski konjanici, ako se vide pod kutom $\varphi = 8'$ i ako je visina konjanika zajedno s konjem $v = 2 \cdot 35$ m?
$x = v . \operatorname{cotg} \varphi = 1 \cdot 010\ km$.

576. S mjesta, koje je 250 m nad morem, vidi se brod pod kutom depresije $\varphi = 3^{0} 20' 14''$. Kako je brod daleko od podnožišta toga mjesta, ako se morska površina zamišlja ravninom?
$d = v . \operatorname{cotg} \varphi = 4287 \cdot 3$ m.

577. Aeroplan udaljio se od mjesta A 4 km i s visine 3 km vidi mjesta A i B pod kutom $\varphi = 139^{0} 23' 55''$. Kolika je udaljenost d mjesta A i B?
Nad A i B podigni trokut s vrhom na mjestu, gdje je aeroplan. Visina mu je 3 km, a dijeli kut φ u α i β, koji se nađu iz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\alpha = 53^{0} 7' 48''$, $\beta = 86^{0} 16' 7''$; $d - 4 = 3 . \operatorname{tg} \beta$ ili $d = 50\ km$.

578. Kako se odnosi polumjer Zemlje (6370 km) prema polumjeru paralele, na kojoj je Zagreb ($\varphi = 45^{0} 48' 54''$ sjev. šir.)?
$r = R \cos \varphi$; $R : r = 1 : \cos \varphi = 1 : 0 \cdot 697$.

§ 20. KOSOKUTAN TROKUT.

579. U trokutu je poznato $a = 25$, $\beta = 60^{0}$, $\gamma = 20^{0}$. Riješi trokut.
Iz sinusova poučka slijedi $b = 21 \cdot 99$, $c = 8 \cdot 68$, $\alpha = 100^{0}$.

580. Riješi trokut iz podataka $a = 38$, $c = 50$, $\gamma = 45^{0} 48' 50''$
Iz sinusova poučka slijedi $\alpha = 33^{0}\ 1'\ 25''$, $b = 68 \cdot 41$.

581. Poznat je polumjer trokutu opisana kruga $r = \frac{65}{6}$ i kutovi trokuta $\alpha = 36^{0} 52' 12''$, $\beta = 67^{0} 22' 48''$. Nađi ostale dijelove i ploštinu trokuta.
$2r = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$. $a = 13, b = 20, c = 21, P = 126$.

582. U trokutu je zadan polumjer opisana kruga r = 92·5 i kutovi $\alpha = 71^{0}4'31''$, $\beta = 55^{0}47'40''$. Riješi trokut.
$2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; $2r = \frac{b}{\sin\beta}$; za c primijeni sinusov poučak.
$a = 175$, $b = 153$, $c = 231{\cdot}26$, $P = 12982{\cdot}4$.

583. U trokutu je poznata suma stranica a + b = 384·007, kut $\beta = 38^{0}40'$ i polumjer kruga opisana trokutu r = 126·02. Riješi trokut.
$2r = \frac{b}{\sin\beta}$; $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; $\alpha = 64^{0}1'40''$, a = 226·563,
b = 157·44, c = 246·172.

584. Ploština je trokuta P = 420. $\alpha = 120^{0}30'37''$. $\gamma = 36^{0}52'12''$. Kolike su stranice trokuta?
$ab = \frac{840}{\sin\gamma}$; $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$. c nađi pomoću sinusova poučka. $a = 56$, $b = 25$, $c = 39$.

585. Nađi ploštinu trokuta, od kojega je poznat opseg $p = 44$ i kutovi $\alpha = 30^{0}30'37''$, $\gamma = 112^{0}37'12''$.
Iz sinusova poučka slijedi: $(a+b+c) : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = a : \sin\alpha$ ili $p : 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = a : \sin\alpha$. Odatle: $a = \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$; analogno $c = \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$. Prema formuli za ploštinu trokuta $(P = \frac{1}{2}\,ac.\sin\beta)$ slijedi: $P = \frac{p^2}{4}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}} = 66$.

586. Poznati su dijelovi trokuta: $\alpha + \beta = 150^{0}\,38'16''$, $\alpha - \beta = 25^{0}20'40''$, c = 56 m. Riješi trokut.
Nađi α i β, a onda primijeni sinusov poučak.
$a = 114{\cdot}14$, $b = 101{\cdot}44$.

587. Zadana je ploština pravilnoga deseterokuta P = 1 m². Kolik je polumjer opisanoga kruga i kolika je stranica s deseterokuta?
$P = 5r^2 \sin 18^{0}$, $r = 0{\cdot}821\,m$; $s = \frac{r}{2}\,(\sqrt{5} - 1) = 0{\cdot}507\,m$.

588. Zadan je opseg trokuta O = 132 cm i $\alpha = 6^{0}21'35''$, $\gamma = 143^{0}\,7'\,48''$. Kolike su stranice trokuta?

Iz $2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ nađi a, b, c i to zbroji, da dobiješ r. $a = 12$, $b = 55$, $c = 65$.

589. Poznati su kutovi trokuta $\alpha = 22^{0}57'12''$, $\beta = 53^{0}7'48''$ i polumjer njemu opisana kruga r = 32·5. Kolika je ploština trokuta?
$P = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 630$.

590. Nađi ploštinu trokuta, kojemu je jedna stranica pravilnoga 8-kuta upisana u krug polumjera r = 5, a druga mu je stranica dijametar toga kruga.
Primijeni $P = \frac{ab}{2}\sin\gamma$, $P = r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}.\sin 67^{0}30' = 17{\cdot}67$.

591. Na vodoravnoj se ravnini izmjeri dužina AB = 50 m, kojoj produženje prolazi podnožištem tornja, i izmjere se kutovi elevacije u A i u B: $\alpha = 49^{0}$, $\beta = 31^{0}$. Kolika je visina tornja?
$v = AB \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = 62{\cdot}90\,m$.

592. U trokutu ima kut na vrhu $\alpha = 45^{0}$, a visina dijeli bazu na odreske $m = 5$, $n = 3$. Kolike su stranice?
Visina dijeli kut α u α_1 i α_2. Upotrijebi $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)$ i $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{m}{v}$; $v = \frac{m+n}{2\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\left(\frac{m+n}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + mn} = 9{\cdot}57$,
$a = 10{\cdot}52$, $b = 10{\cdot}02$.

593. Kolik je kut, što ga zatvaraju stranica a i težišnica spuštena na stranicu b, ako je $a = 15$, $b = 10$, $\gamma = 60^{0}$? Koliki su dijelovi c, α i β?
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sin\gamma}{2a - b\cos\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, $\varphi = 19^{0}\,6'23{\cdot}5''$; $\frac{\alpha-\beta}{2} = \varphi$;
$\beta = 40^{0}53'39''$, $\alpha = 79^{0}6'21{\cdot}5''$ $c = 13{\cdot}23$.

594. Iz ploštine trokuta P = 66 i kutova $\alpha = 30^{0}30'37''$, $\beta = 36^{0}\,52'11''$ nađi stranice trokuta.
Iz formule $P = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ i sinusova poučka dobit ćeš jednadžbe: $ab = \frac{2P}{\sin\gamma}$, $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Množenjem tih jednadžbi dobit ćeš $a = \sqrt{\frac{2P\sin\alpha}{\sin\beta.\sin(\alpha+\beta)}}$, $b = \sqrt{\frac{2P\sin\beta}{\sin\alpha.\sin(\alpha+\beta)}}$.
Pomoću $c : a = \sin(\alpha+\beta) : \sin\alpha$ dobit ćeš:
$c = \sqrt{\frac{2P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}}$. $a = 11$, $b = 13$, $c = 20$.

595. **Ploština kružnoga odsječka jest $S = 250$, a njemu pripadni centrični kut jest $\alpha = 39^0 51'$. Kolik je polumjer pripadnoga kruga?**
$\frac{\alpha r^2 \pi}{360} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha = S$; $\quad r = 95 \cdot 52.$

596. **Kut na vrhu kosokutna trokuta ima $72^0 24' 38''$, a visina dijeli bazu u odreske $m = 2 \cdot 5$, $n = 2 \cdot 2$. Riješi trokut.**
Visina dijeli kut α na vrhu u α_1 i α_2, pa je $\mathrm{tg}\ \alpha = \mathrm{tg}\ (\alpha_1 + \alpha_2)$; $\mathrm{tg}\ \alpha_1 = \frac{m}{v}$. $\alpha_1 = 37^0\ 56'\ 48''$, $\alpha_2 = 34^0\ 27'\ 50''$, $a = 4 \cdot 07$, $b = 3 \cdot 9$, $v = 3 \cdot 2$.

597. **U krug polumjera $r = 5$ cm upiši istokračan trokut, u kojem ima kut na vrhu (β) $68^0\ 42'\ 50''$. Kolike su stranice i ploština trokuta?**
$2r = \frac{b}{\sin \beta}$; $s = \frac{b}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = 2r \cos \frac{\beta}{2}$; $s = 8 \cdot 255$, $b = 9 \cdot 318$,
$P = 31 \cdot 752.$

598. **Da se izračuna širina rijeke, izmjeri se duž jedne obale dužina $AB = 64$ m i kutovi, što ih zatvaraju pravci od krajnih točaka dužine AB — povučeni do točke C na suprotnoj obali — s dužinom AB. Ako su ti kutovi $\alpha = 53^0\ 16'$, $\beta = 61^0\ 28'$, kolika je širina rijeke?**
Primijeni sinusov poučak, da dobiješ stranicu b.
$š = b \cdot \sin \alpha = d \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 49 \cdot 612$ m.

599. **Da se izmjeri udaljenost nepristupačne točke C od neke određene točke D, koja je onoj nasuprot, izmjeri se povoljna dužina AB tako, da prolazi točkom D okomito na udaljenost CD. Zatim se odrede kutovi, što ih zatvaraju zrake doglednice s dužinom AB u njezinim krajnim točkama. Ako su ti kutovi $\alpha = 35^0 12'$, $\beta = 24^0 13'$ i $AB = 50$ m, kako je C daleko od D?**
$CD = AC \cdot \sin \alpha$. Iz sinusova poučka slijedi:
$CD = AB \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 13 \cdot 73$ m.

600. **Iz točke A vidi se vrh V brijega pod kutom elevacije $\varepsilon_1 = 47^0 20' 34 \cdot 5''$, a iz točke B pod kutom $\varepsilon_2 = 53^0 29' 48 \cdot 8''$. Koliko je visok brijeg, ako su točke A i B međusobno udaljene 190 m, a leže s podnožištem P vrha brijega na istom pravcu?**

$VP = AV \cdot \sin \varepsilon_1$; sinusov poučak daje: $AV = AB \cdot \frac{\sin \ _2}{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$. $\quad VP = 1001$ m.

601. **Dvije se ceste sijeku pod kutom $\alpha = 135^0$. U tom kutu leži selo S, koje je od jedne ceste udaljeno 3 km, a od druge 5 km. Kako je daleko to selo od raskršća R?**
Neka je φ kut nasuprot kateti 5; $5 = SR \cdot \sin \varphi$, $3 = SR \sin\ (\alpha - \varphi)$ ili $3 = SR \sin \alpha \cos \varphi - 5 \cos \alpha$;
$SR = \frac{3 + 5 \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \varphi}$; $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{SR^2 - 25}}{SR}$.
To uvršteno u izraz za SR daje: $SR = \frac{\sqrt{34 + 30 \cos \alpha}}{\sin \alpha}$.
Jer je $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, slijedi: $SR = \sqrt{68 - 30\sqrt{2}}$.

602. **Na jednoj je strani rijeke toranj, kojemu treba izmjeriti visinu s druge strane rijeke. U tu je svrhu odabrana dužina $AB = 50$ m, kojoj produženje ne prolazi podnožištem tornja. Iz mjesta A izmjeren je kut $\alpha = 75^0 30'$, što ga zatvara AB i zraka doglednica AC (C jest nožište tornja). Iz mjesta B izmjeren je kut $\beta = 45^0$, što ga AB zatvara sa zrakom doglednicom BC. Još je iz A izmjeren kut elevacije vrha tornja $\gamma = 64^0 13' 53''$ i za kontrolu kut elevacije $\delta = 56^0 32' 13''$ iz B. Kolika je visina tornja?**
Ako je C nožište tornja, a D njegov vrh, slijedi: $CD = v = AC\ \mathrm{tg}\ \gamma$. Iz Δ ABC slijedi: $AC : AB = \sin \beta : \sin(\beta + \gamma)$. To uvršteno u izraz za CD daje:
$CD = AB \cdot \frac{\sin \beta \cdot \mathrm{tg}\ \gamma}{\sin\ (\beta + \gamma)} = 85$ m.

603. **Dva su tornja razdaleko 100 m. Iz sredine spojnice njihovih podnožišta vidi se vrh jednoga tornja pod kutom elevacije 49^0, a vrh drugoga tornja pod kutom 71^0. Koliko će trebati žice, da se napne od jednoga vrha do drugoga?**
Transformirani kosinusov poučak daje $d = 116 \cdot 1$ m.

604. Iz mjesta A vode dvije ceste, koje zatvaraju kut $\varphi = 45^0$. Na jednoj cesti leži mjesto B, udaljeno od A 30 km, a na drugoj leži mjesto C, udaljeno od A 25 km. Koliko je udaljeno mjesto B od mjesta C?
Transformirani kosinusov poučak! BC = *21·55 km*.

605. Rastavi silu $R = 12$ kg* u dvije komponente, od kojih jedna (P) s rezultantom zatvara kut $\alpha = 30^0$, a druga (Q) $\beta = 45^0$.
Paralelogram sila! Primijeni sinusov poučak (stranica R i dva kuta α i β na njoj), pa ćeš dobiti: P : Q = sin β : sin α. Zatim primijeni kosinusov poučak na R, pa ćeš dobiti: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \cos(\alpha + \beta)$. *P = 8·55 kg*, Q = 6·03 kg*.*

606. Časnik stoji u udaljenosti 2·567 km od lijevoga krila neprijateljske vojske, 6·324 km od desnoga krila, a čitavu frontu vidi pod kutom 38°12'45". Koliko je duga neprjateljska fronta?
Kosinusov poučak! Fronta je duga *4·591 km*.

607. U trokutu je poznato $a + b = 25$, $c = 12$, $\gamma = 50^0 10' 12''$. Riješi trokut.
Mollweidove jednadžbe! $\alpha = 143^0 12' 24''$, $\beta = 13^0 21' 36''$, $a = 13{\cdot}15$, $b = 11{\cdot}85$.

608. U kosokutnom je trokutu zadano: a = 315·55, b—c = = 170, $\alpha = 40^0 13' 18''$. Kolike su stranice i ploština trokuta?
Upotrijebi Mollweidove jednadžbe.
$b = 480{\cdot}81$, $c = 310{\cdot}81$, $\beta = 100^0 16' 48''$, $\gamma = 39^0 29' 54''$, $P = 482{\cdot}50$.

609. U trokutu je zadana suma visina spuštenih na stranice b i c, kut α i stranica c. Riješi trokut, ako je $v_b + v_c = 119{\cdot}46$, $\alpha = 42^0 26' 52''$, $c = 78$.
Pomoću v_b nađi v_c, a odavle stranicu b.
$v_b = c \cdot \sin \alpha$; primijeni tangensov poučak. —
$b = 99$, $c = 78$, $a = 67$, $\beta = 85^0 45' 51''$, $\gamma = 51^0 47' 17''$.

610. Poznata je ploština trokuta $P = 120$, $\beta - \alpha = 8^0 22' 12''$, $\gamma = 143^0 7' 48''$. Nađi stranice trokuta.

Iz $P = \frac{ab}{2} \sin \gamma$ izrazi b i uvrsti u tangensov poučak.

$$a^2 = \frac{2P}{\sin \gamma} \cdot \frac{\cot \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cot \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}} = \frac{2P}{\sin \gamma} \frac{\cos \frac{\gamma + (\beta - \alpha)}{2}}{\cos \frac{\gamma - (\beta - \alpha)}{2}}.$$

$a = 16$, $b = 25$, $c = 39$.

611. Riješi trokut, u kojemu je $a = 10$, $b = 7$, $\gamma = 55^0 32' 28''$.
Tangensov poučak! $\alpha = 80^0 45' 23''$, $\beta = 43^0 42' 9''$, $c = 8{\cdot}35$.

612. U trokutu je poznato: $a = 56$, $b = 34$, $\gamma = 75^0 25' 14''$. Riješi trokut.
Primijeni tangensov poučak, da dobiješ α i β, a zatim sinusov p. da dobiješ c. $\alpha = 69^0 50' 5''$, $\beta = 34^0 44' 41''$, $c = 57{\cdot}74$.

613. U trokutu je poznato: a—c = 15, $\alpha - \gamma = 15^0 16'$, $= 47^0 15' 20''$. Koliki su pojedini dijelovi?
Tangensov poučak! $a = 135{\cdot}42$, $c = 120{\cdot}42$. Stranicu b nađi pomoću sinusova poučka! $b = 103{\cdot}46$, $\alpha = 74^0 0' 20''$.

614. Riješi trokut, u kojem je poznato $a + b = 142$ cm, $\gamma = 75^0 20'$ i ploština $P = 50$ cm².
Riješi jednadžbe: a+b = 142, 2P = ab . sin γ, a onda primijeni tangensov poučak. $a = 141{\cdot}27$, $b = 0{\cdot}73$, $\alpha = 104^0 22' 49''$, $\beta = 0^0 17' 11''$.

615. Od kosokutnoga su trokuta poznati dijelovi: $b = 14$, $c = 20$, $\alpha = 36^0 15'$; koliki su ostali dijelovi?
Tangensov poučak! $\beta = 43^0 32' 44''$, $\gamma = 100^0 12' 16''$, $a = 12{\cdot}02$.

616. Riješi trokut iz podataka: $a + b = 173$, $\gamma = 38^0 50'$ i ploštine $P = 2280$.
Riješi jednadžbe po a i b, pa primijeni tangensov poučak. $a = 101$, $b = 72$, $c = 63{\cdot}68$, $\alpha = 96^0 1'$ $\beta = 45^0 9'$.

617. U trokutu su zadani ovi dijelovi: $a = 2066$, $b = 2954{\cdot}4$, $\gamma = 72^0 18'$. Riješi trokut.
Iz tangensova poučka dobit ćeš: $\alpha = 40^0 14'$, $\beta = 67^0 28'$, $c = 3047{\cdot}21$.

618. Poznate su stranice trokuta $a = 27$, $c = 11$ i ploština $P = 176$. Riješi trokut.

Iz $P = \frac{ac}{2} \sin\beta$ nađi β, pa primijeni tangensov poučak. $\beta = 6^0 11' 7''$, $\alpha = 125^0 0' 13''$, $\gamma = 48^0 48' 40''$. Za b primijeni $P = \frac{ab}{2} \sin\gamma$. $b = 12 \cdot 40$.

619. Riješi trokut, u kojem je poznato $a = 15$, $c = 20$, $\beta = 35^0 50'$.
Za kutove primijeni tangensov, a za stranicu b sinusov poučak. $\alpha = 48^0 14' 42''$, $\gamma = 95^0 55' 18''$, $b = 11 \cdot 77$.

620. Poznate su stranice trokuta $a = 65$, $b = 51$ i ploština $P = 408$. Riješi trokut.
Iz $P = \frac{ab}{2} \sin\gamma$ slijedi $\gamma = 14^0 15'$. Iz tangensova poučka slijedi: $\alpha = 126^0 48' 30''$, $b = 38^0 56' 30''$. Iz $P = \frac{ac}{2} \sin\beta$ slijedi $c = 20 \cdot 42$.

621. Zadane su stranice trokuta $a = 20$, $b = 15$, $c = 25$. Koliki su kutovi, ploština, polumjer trokutu opisana i upisana kruga?
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$; $\alpha = 53^0 7' 49''$, $\beta = 36^0 52' 11''$, $\gamma = 90^0$, $P = 150$, $r = \frac{abc}{4P} = 7 \cdot 5$, $\varrho = \frac{P}{s} = 5$.

622. Riješi trokut iz podataka: $a = 100$, $b = 60$, $c = 50$.
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, za kut $\frac{\beta}{2}$ analogna formula!
$\alpha = 130^0 32' 29''$, $\beta = 27^0 7' 38''$.

623. Zadane su stranice trokuta $a = 50$, $b = 60$, $c = 80$; koliki su kutovi?
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b(s-c)}{s(s-a)}}$; $\alpha = 38^0 37' 30''$, $\beta = 23^0 3' 15''$, $\gamma = 118^0 19' 15''$.

624. Izračunaj najmanji kut trokuta, koji ima stranice $a = 99$, $b = 78$, $c = 67$.
$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$; $\gamma = 42^0\ 26'\ 52''$.

§ 21. STEREOMETRIJA I TRIGONOMETRIJA.

625. Pravilna 6-strana kosa prizma ima osnovni brid 8 cm, a duljinu pobočnoga brida 18 cm. Ako pobočni brid zatvara s bazom kut $\gamma = 25^0 25' 2''$, kolik je volum prizme?
Visina $v = 18 . \sin\gamma$; $V = 1284 \cdot 91\ cm^3$.

626. Trostrana piramida ima visinu $v = 32$ cm, a pobočne bridove $s_1 = 40$, $s_2 = 53$, $s_3 = 64$ cm. Koliki su prikloni kutovi pobočnih bridova i baze?
$v = s_1 . \sin\gamma_1$; $\gamma_1 = 53^0 7' 50''$, $\gamma_2 = 37^0 8' 25''$, $\gamma_3 = 30^0$.

627. Uspravan stožac baze $B = 80\ cm^2$ voluma $V = 240\ cm^3$ presječen je ravninom, koja prolazi vrhom stošca, a bazu siječe pod kutom $\varphi = 45^0$. Kolika je površina P dobivena trokuta, ako on ima kut na vrhu $\alpha = 90^0$?
$P = 9 \left(\frac{V}{B}\right)^2 . \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\varphi} = 81\ cm^2$.

628. Zadana je ploština $P = 48\pi\ cm^2$ najvećega kuglina kruga. U kuglu se ima upisati pravilna uspravna trostrana piramida s bazom u ravnini zadanoga kruga. Nađi osnovni brid a i pobočni b. Kolik je volum piramide? Koji kut zatvara jedna pobočka s bazom?
Polumjer kruga je $\frac{2}{3}$ visine baze. $a = 3\sqrt{\frac{P}{3\pi}}$, $b = \sqrt{\frac{2P}{\pi}}$.
$V = \frac{P}{4\pi} . \sqrt{\frac{3P}{\pi}}$; $a = 12\ cm$, $b = 4\sqrt{6}\ cm$, $V = 144\ cm^3$.

629. Osnovnim bridom kocke položena je ravnina, koja s bazom zatvara kut $\alpha = 60^0$. Dobiven presjek ima ploštinu $P = 25\ cm^2$. Kolik je brid a kocke i koliko je njezino oplošje?
$a = \sqrt{P\sin\alpha} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $O = 6 P \sin\alpha = 75\sqrt{3}$.

630. U pravokutnom paralelepipedu odnose se bridovi kao $5 : 3 : 2$, a baza ima dijagonalu $d = 3\sqrt{34}$, koja zatvara s dijagonalom paralelepipeda kut $\varphi = 47^0 15' 28''$. Koliko je oplošje i kolik je volum?

Stavi a : b : c = m : n : p. Odatle: a : b = m : n ili a : m = b : n = k. Odatle a = km. Analogno ćeš dobiti b = kn, c = kp. Ove 3 jednadžbe kvadriraj i zbroji. Dobit ćeš : $k = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{m^2+n^2+p^2}}$; $a^2+b^2+c^2 = D^2$ (dijagonala paralelepipeda) ; $a = D\cos\varphi$; odatle : $k = \frac{d}{\cos\varphi\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$. Ovdje su m, n, p brojevi 5, 3, 2. $k = 8{\cdot}1504$, $a = 8{\cdot}1504.5 = 40{\cdot}75$, $b = 24{\cdot}45$, $c = 16{\cdot}30$.

631. **Os kose pravilne šesterostrane prizme zatvara s bazom kut $\varphi = 45^0$. Ako je osnovni brid $a = 8$ cm, a pobočni $b = 20$ cm, koliko je oplošje i volum prizme?**
$O = 3a(\sqrt{3}\,a + 2b) = 1292{\cdot}16\ cm$; $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2b\sin\varphi = 391{\cdot}920\ cm^3$.

632. **Kosa trostrana piramida ima osnovne bridove $a = 30$, $b = 25$, koji zatvaraju kut $\gamma = 45^0$. Najkraći pobočni brid $d = 24$ stoji u omjeru s visinom piramide kao 2 : 1. Kolik je volum piramide?**
$V = \frac{abd}{12}\sin\gamma = 750.\sqrt{2}$; $v = \frac{d}{2}$.

633. **Kosa trostrana piramida ima osnovne bridove $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 17$ cm. Spojnica n težišta baze i vrha piramide duga je 21 cm, a zatvara s bazom kut $\varphi = 40^0 15' 20''$. Kolik je volum, kolika baza i visina?**
$V = \frac{n}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\sin\varphi = 336{\cdot}81\ cm^3$, $B = 74{\cdot}46\ cm^2$, $v = 13{\cdot}57\ cm$.

634. **U bazi stošca voluma $V = 1813{\cdot}8\ cm^3$ upisan je romb, kojemu je šiljast kut $\psi = 60^0$. Taj je romb baza piramide, koja ima sa stošcem zajedničku os (spojnicu vrha s težištem baze). Kolik je volum piramide?**
Uvedi u račun prikloni kut φ, što ga zatvara os s bazom i njezinu dužinu m. Stranica je romba $a = \frac{2.r}{\sin\psi}$; baza romba $B = \frac{12\,V}{m\,\pi.\sin\varphi\sin\psi}$. Volum piramide $= \frac{4\,V}{\pi.\sin\psi} = 2666{\cdot}6\ cm^3$.

635. **Koliko je oplošje rotacionoga tijela, koje nastaje rotacijom trokuta oko stranice $c = 40$, ako taj trokut ima kutove $\alpha = 67^0 22' 49''$, $\beta = 18^0 55' 29''$?**

Trokut ABC vrti se oko AB. Oplošje je jednako sumi plašteva gornjega i donjega stošca t. j. $O = c\pi(BC + AC) = c^2\pi(\sin\beta + \sin\alpha) = 2c^2\pi \times \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1995{\cdot}9$.

636. **Uspravna piramida ima osnovku kvadrat, u kojemu dijagonala zatvara s pobočnim bridom $b = 12$ kut $\varphi = 33^0 34' 36^0$. Kolik je volum piramide?**
Iz pravokut. trokuta (kojemu je hipotenuza b, a katete su visina piramide i polovica dijagonale d baze) nađi v i $\frac{d}{2}$. $v = b.\sin\varphi$, $\frac{d}{2} = b.\cos\varphi$. Jer je $d = a\sqrt{2}$, a volum $= \frac{\text{baza} \times \text{visina}}{3}$, slijedi : $V = \frac{2}{3}\,b^3\sin\varphi\cos^2\varphi = \frac{b^3}{3}\sin 2\varphi.\cos\varphi = 442{\cdot}24$.

637. **Uspravna prizma ima bazu istokračan trokut, u kojemu krak zatvara s trokutovom osnovnicom kut $\varphi = 42^0 12' 30''$. Prizmu siječe ravnina položena paralelno s krakom baze i zatvara s ravninom baze kut $\psi = 60^0$. Ako je ploština nastaloga presjeka $P = 64\ cm^2$, koliki su osnovni bridovi prizme?**
Baza B je projekcija presjeka P, pa je $B = P.\cos\psi$; $a = \sqrt{\frac{2P\cos\psi}{\sin 2\varphi}} = 8{\cdot}02\ cm$, $b = 2a\cos\varphi = 11{\cdot}88 cm$.

638. **Nađi kut, što ga zatvara visina v uspravnoga stošca s jednom izvodnicom s i oplošje O toga stošca, ako je zadano $v + s = 9$, $r + v = 7$, $\frac{r+v}{s} = \frac{7}{6}$, gdje r znači polumjer baze.**
Iz svake jednadžbe izrazi v i načini $\cos\varphi = \frac{v}{s}$. $s = 6$, $v = 3$, $\varphi = 60^0$, $r = 4$, $O = 40\pi$.

639. **Volum pravilne uspravne 5-strane piramide jest $V = 30\ cm^3$, a prikloni kut pobočnoga brida prama osnovici jest $\varphi = 65^0$. Kolik je osnovni brid?**
$s_5 = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3V}{20\sin 72^0 \operatorname{tg}\varphi}} = 3{\cdot}06\ cm$.

640. **Od uspravne piramide, kojoj je osnovka pravilan 8-kut, zadan je osnovni brid $b = 12$ cm i kut $\varphi = 32^0 15' 25''$, što ga pobočni brid zatvara s visinom piramide. Kolik je volum piramide?**

$V = \frac{b^3}{3\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{2(10+7\sqrt{2})} = 6808{\cdot}2\ cm^3.$

641. Kosa trostrana prizma ima bazu sa stranicama a, b, c; pobočni brid jest d, a njezina os zatvara s osnovkom kut φ. Nađi volum te prizme V_p i njoj opisanoga valjka V_v. Kako se odnose volumi?
$V_p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.\,d\,.\,\sin\varphi$; $V_v = \frac{a^2.b^2\,c^2.d.\pi.\sin\varphi}{16P^2}$; $V_p : V_v = 16P^3 : a^2b^2\,c^2\pi$.

642. Zadan je osnovni brid a, pobočni brid b uspravne pravilne trostrane piramide i ploština P onoga trokuta, koji nastane, kad se piramida prereže ravninom položenom njezinim vrhom i raspolovištima dvaju osnovnih bridova, koji se sastaju u jednom uglu. Kolik je kut φ toga trokuta na vrhu piramide i kolik je volum piramide?
$\sin\varphi = \frac{8P}{4b^2-a^2}$, $V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$.

643. Karakterističan je presjek valjka romb, kojega je kraća dijagonala $d=4$, a dulja zatvara s osnovicom valjka kut $\varphi = 30^0$. Kolik je volum?
$V = \frac{d\pi^3 \operatorname{cotg}\varphi}{16\sin\varphi} = 8\sqrt{3}\,.\,\pi.$

644. Nađi volum kosoga stošca, kojemu je dulja stranica s duga 6 cm, a os a duga 4 cm, zatvara s bazom prikloni kut $\varphi = 83^0 20'$.
Sinusov poučak! $v = 3{\cdot}973$, $r = 4{\cdot}032$, $V \doteq 67{\cdot}63\ cm^3$.

645. U uspravnoj je piramidi baza kvadrat, u kojem dijagonala d zatvara s pobočnim bridom kut $\varphi = 25^0 35'$. Ako je pobočni brid $b = 15$, kolik je volum piramide?
$\frac{d}{2} = b\,.\cos\varphi$; $a = \frac{2}{\sqrt{2}}\,b\,.\cos\varphi$, $v = b\sin\varphi$,
$V = \frac{2}{3}\,b^3\cos^2\varphi\sin\varphi = 790{\cdot}44.$

646. Kosi stožac ima bazu ploštine $B = 81\pi$, najdulja njegova stranica (izvodnica) a zatvara s bazom kut $\varphi = 30^0$, a os njegova c zatvara s bazom kut $\psi = 45^0$. Kolika je ploština P prereza položenoga kroz najveću i najmanju stranicu stošca i kolika je os stošca?

Iz sinusova poučka slijedi: $a = \sqrt{\frac{B}{\pi}} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin(\psi-\varphi)} = 9\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$; $P = \frac{B}{\pi}\,\frac{\sin\varphi\,.\,\sin\psi}{\sin(\psi-\varphi)} = \frac{8l}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{3})}$;
$c = \sqrt{\frac{B}{\pi}} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin(\psi-\varphi)} = 9\sqrt{2+\sqrt{3}}.$

647. Kolika je površina pojasa (zone), što ga omeđuju paralele Beča i Zagreba, ako ima zemaljski polumjer 6370 km i ako su sjev. širine tih gradova $\varphi_1 = 48^0 12' 35''$, $\varphi_2 = 45^0 48' 54''$?
$v = r(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$, $P = 2r\pi v = 4r^2\pi.\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \times \sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = 72659000\ ha.$

648. U uspravni istostrani valjak visine $v = 22$ upisana je trostrana prizma, u kojoj osnovni bridovi b i c zatvaraju kut $\alpha = 30^0 30' 37''$, a bridovi a i b kut $\gamma = 112^0 37' 12''$. Ako je opseg osnovke $p = 44$, koliko je oplošje prizme?
Iz sinusova poučka slijedi: $(a+b+c) : (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = a : \sin\alpha$ ili $p : 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = a : \sin\alpha.$

Odatle: $a = \frac{p}{4} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$ ili $a = \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\,.\,\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$;

$c = \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$. Ploština obiju baza jest: $2B = ac\sin\beta$ ili $2B = \frac{p^2}{2}\,.\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}$; $O = 2B + p.v = 1100.$

649. Dijagonale $d_1 = 10$, $d_2 = 6$ osnovke nepravilne 4-strane uspravne piramide zatvaraju kut $\varphi = 50^0 30'$, a pobočni bridovi, koji idu krajnjim točkama dijagonale d_1 zatvaraju s njom kutove $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$. Kolik je volum piramide?
Baza $B = \frac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi$. Da nađeš visinu piramide, primijeni sinusov poučak. Dobit ćeš $v = d_1\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;
$V = \frac{1}{6}\,d_1^2\,d_2\sin\varphi \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 57{\cdot}18.$

650. Uspravna trostrana prizma ima produkt osnovnih bridova $abc = 2860$, kut, što ga zatvaraju bridovi

b i c, $\alpha = 30^0 30' 37''$ **i kut, što ga zatvaraju bridovi** a **i** c, $\beta = 31^0 52' 11''$. **Kolik je volum prizme, ako je njezina visina jednaka promjeru bazi opisanoga kruga?**
Sinusov poučak! $a = 11$, $b = 13$, $c = 20$, ploština baze $B = 66$, $r = \frac{65}{5}$, $v = \frac{65}{3}$, $V = \mathit{1430}$.

651. **Nađi volum i oplošje uspravne trostrane prizme, kojoj su osnovni bridovi** $a = 5$, $b = 4$, $\gamma = 43^0 17' 25''$, **a visina joj je 10.**
Osnovicu nađi po formuli $P = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$; c nađi po tangensovu poučku (ili kosinusovu) $V = \mathit{68{\cdot}571}$. $\alpha = 83^0 59' 47''$, $\beta = 52^0 42' 47''$, $c = \mathit{3{\cdot}4475}$, $O = \mathit{137{\cdot}71}$.

652. **Odredi volum kosoga stošca, ako je zadana njegova najdulja i najkraća izvodnica** $s_1 = 3$**dm**, $s_2 = 2$**dm i kut, što ga zatvaraju te izvodnice** $\alpha = 120^0$.
Da nađeš polumjer, primijeni kosinusov (tangensov) poučak. Visina $v = \mathit{1{\cdot}788dm}$, $V = \mathit{3{\cdot}953dm^3}$.

653. **Kosi stožac ima polumjer** $r = 6$ **cm, najdužu izvodnicu** $a = 20$ **cm, a najkraću** $b = 18$ **cm. Kolika je os** s **stošca?**
Najprije nađi kut nasuprot najmanjoj izvodnici (3 poznate stranice)! — Os nađi pomoću transformiranoga kosinusova poučka. $\frac{\varphi}{2} = 31^0 21' 38''$, $s = \mathit{18{\cdot}1\ cm}$.

§ 22. GONIOMETRIJSKE JEDNADŽBE.

Riješi jednadžbe:

654. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$. $\quad \sin 2x = 1$; $x = 45^0$.

655. $\cos x \operatorname{tg} x + \sin x = 1$. $\quad 2\sin x = 1$; $x = 30^0$.

656. $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg}(x + 30) = 2\sqrt{3}$.
Primijeni formulu $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Dobit ćeš $3 \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $x = 30^0$.

657. $\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 2$.
Stavi $\frac{\cos x}{\sin x} = y$. Dobit ćeš $y^2 - 2y + 1 = 0$ ili $y = 1$; $x = 45^0$.

658. $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
$\operatorname{tg}^2 x - \frac{4}{3}\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$; $\operatorname{tg} x_1 = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $x_1 = 60^0$, $x_2 = 30^0$.

659. $x + y = 105^0$, $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 y} = \frac{2}{3}$.
$y = 105^0 - x$. Uvrsti u drugu jednadžbu. Dobit ćeš $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(105^0 - x)$, $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} [\cos 15 \cos x + \sin 15 \sin x]$, ili (podijelivši s $\cos x$) $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{2}{3}} \times [\cos 15 + \sin 15 \operatorname{tg} x]$ ili $\operatorname{tg} x = \frac{\cos 15}{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sin 15} = \frac{0{\cdot}96\,593}{0{\cdot}96592} = 1$; $x = 45^0$, $y = 60^0$.

660. $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{7}{12}$.
Izrazi *tg x* sa *sin x*. Dobit ćeš: $12 \sin^4 x - 31 \sin^2 x + 7 = 0$. Odatle: $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ t. j. $x_1 = 30^0$, $x_2 = 150^0$. ($\sin^2 x = \frac{7}{3}$ ne zadovoljava, jer $\sin x$ ne može biti > 1).

661. $\sin x - \cos x - \sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.
Stavi $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, pa izluči zajedničke faktore. Dobit ćeš 2 jednadžbe: $\sin x - \cos x = 0$, $1 + 2\sin x = 0$; $x_1 = 45^0$, $x_2 = 150^0$.

662. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.
$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(x + 2x)$. Uvrstivši to u zadanu jednadžbu riješi se nazivnika. $x_1 = 35^0\ 15'\ 53''$, $x_2 = 54^0\ 44'\ 9''$, $x_3 = 125^0\ 15'\ 51''$, $x_4 = 0$, $x_5 = 180^0$.

663. $\sin 4x - \sin 2x = \sin x$.
Lijevu stranu pretvori u produkt. $x = 20^0$.

664. $x + y = 45^0$, $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} y$.
$y = 45 - x$; $\operatorname{tg} x = 2\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ili $\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$, $\operatorname{tg} x_1 = 0{\cdot}56156$, $\operatorname{tg} x_2 = -3{\cdot}56156$. $x = 29^0 19'$, $y = 15^0 41'$.

665. $x + y = 90^0$, $\cos x \cos y = 0{\cdot}43301$.
Uvrsti $y = 90^0 - x$ u drugu jednadžbu. $x = 60^0$, $y = 30^0$.

666. **U trokutu je poznat kut** $\alpha = 64^0$ **i** $\sin\beta \cos\gamma = 0{\cdot}74329$. **Koliki su** β **i** γ**?**

Primijeni: $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=2\sin\beta\,.\,\cos\gamma$. $\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)=1{\cdot}48658$, $\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha$. Dakle: $\sin(\beta-\gamma)=0{\cdot}58779$ (jer je $\sin 64^0=0{\cdot}89879$). Kad tu jednadžbu logaritmiraš i antilogaritmiraš, dobit ćeš: $\beta=76^0$; $\gamma=40^0$.

SFERNA TRIGONOMETRIJA.

§ 23. PRAVOKUTAN TROKUT.

(*a* i *b* su katete, *c* hipotenuza.)

667. **U sfernom su pravokut. trokutu poznate katete** $a=27^014'$, $b=35^018'$; **nađi ostale komade trokuta.** Izrazi po Napierovu pravilu *cos c* pomoću daljih komada, a *sin a* i *sin b* pomoću bližih. $c=43^028'30''$, $\beta=57^07'30''$, $\alpha=41^041'24''$.

668. **Riješi pravokut. sferni trokut, u kojem su poznati ovi komadi:** $\alpha=57^012'$ $b=95^016'$. Izrazi pomoću Napierova pravila *cos* α i *sin b* s bližim, a *cos* β s daljim komadima. — $c=118^032'48''$, $a=57^05'22''$, $\beta=94^024'29''$.

669. **Riješi sf. trokut iz komada** $a=125^035'$, $\beta=70^015'$. Izrazi pomoću N. pravila *sin a* i *cos* β pomoću bližih, a *cos* α pomoću daljih komada. $b=12^045'46''$, $c=103^035'31''$, $\alpha=123^012'25''$.

670. **Riješi sf. trokut iz komada** $c=112^050'$, $a=35^025'$. Izrazi pomoću N. pravila *cos c* i *sin a* s daljim, a *cos* β s bližim komadima. $\alpha=38^057'42''$, $b=132^02'13''$, $\beta=107^025'29''$.

671. **Riješi sf. trokut iz komada** $c=100^040'$, $b=65^020'$. Izrazi pomoću N. pravila *cos c* i *sin b* s daljim, a *cos* α s bližim komadima. $a=116^019'40''$, $\beta=67^037'33''$, $\alpha=114^012'47''$.

672. **Riješi sf. trokut iz komada** $c=95^027'$, $\alpha=84^013'$. Izrazi pomoću N. pravila *cos c* i *cos* α s bližim, a *sin a* s daljim komadima. $\beta=133^09'38''$, $b=90^034'$, $a=82^03'$.

673. **Riješi sf. trokut iz komada** $c=79^030'17''$, $\beta=60^020'28''$. Izrazi pomoću N. pravila *cos c* i *cos* β s bližim, a *sin b* s daljim komadima. $\alpha=72^015'39''$, $a=69^028'31''$, $b=58^042''$.

674. **Riješi sf. trokut iz komada** $\alpha=40^016'$, $\beta=80^032'$. Izrazi pomoću N. pravila *cos* α i *cos* β s daljim, a *cos c* s bližim komadima. $a=39^019'19''$, $b=75^015'29''$, $c=78^038'50''$.

675. **Riješi sf. trokut iz komada** $a=b=130^050'$. Izrazi pomoću N. pravila *sin a* s bližim, a *cos c* s daljim komadima. $c=64^041'18''$, $\alpha=\beta=123^010'46''$.

676. **Riješi sf. pravokutan istokračan trokut, koji ima hipotenuzu** $c=85^010'$. Izrazi pomoću N. pravila *cos c* jedamput s daljim, a drugi put s bližim komadima. Dobit ćeš $\cos a = \pm\sqrt{\cos c}$, $\operatorname{cotg}\alpha=\pm\sqrt{\cos c}$. Dva su rješenja; drugi je trokut susjedan prvomu. $a_1=b_1=73^07'32''$, $\alpha_1=\beta_1=73^048'47''$; $a_2=b_2=106^052'28''$, $\alpha_2=\beta_2=106^011'13''$.

677. **Riješi sf. trokut iz komada** $a+c=70^042'30''$, $b=35^018'$. U $\cos c=\cos a\,.\,\cos b$ uvrsti $c=70^042'30''-a$. Dobit ćeš $\operatorname{tg} a=\frac{\cos 35^018'}{\sin 70^042'30''}-\operatorname{cotg} 70^042'30''$; $a=27^014'$, $c=43^028'30''$.

678. **Nađi stranice sf. trokuta iz komada:** $c=78^038'50''$, $a+b=114^034'48''$. Načini $\cos(a+b)$ i $\cos(a-b)$; dobivene jednadžbe zbroji i primijeni formulu $\cos c=\cos a\cos b$. Dobit ćeš: $\cos(a-b)=2\cos c-\cos(a+b)$. To parcijalno logaritmiraj! $a=39^019'24''$, $b=75^015'24''$.

679. **Riješi sf. trokut iz komada** $a-b=60^011'$, $c=104^0 33'35''$. Načini $\cos(a+b)$ i $\cos(a-b)$; dobivene jednadžbe zbroji i primijeni formulu $\cos c=\cos a\,.\,\cos b$. Dobit ćeš $\cos(a+b)=-0{\cdot}00199$; $a+b=180^0$; $\cos\alpha=$

$=\cot g\, c \cdot tg\, b$, $\cos b = \cot g\, c \cdot tg\, a$ (po N. pravilu).
$a = 120^0 5' 30''$, $b = 59^0 54' 30''$, $\alpha = 116^0 37' 43''$,
$\beta = 63^0 22' 17''$.

680. **Riješi sf. trokut iz komada** $b + c = 154^0 36' 34''$, $a = 51^0 2' 48''$.
Neka je $b + c = m$; odatle: $b = m - c$. To uvršteno u $\cos c = \cos a \cdot \cos b$ daje $tg\, c = \frac{1}{\cos a \cdot \sin m} - \cot g\, m$.
Pomoću N. pravila izrazi $\cos\beta$ i $\cos\alpha$ s bližim komadima. $c = 80^0 14' 22''$, $b = 74^0 22' 12''$, $\alpha = 52^0 3' 27''$, $\beta = 78^0 9'$.

681. **Riješi sf. trokut iz komada** $\alpha + \beta = 127^0 46' 11''$, $c = 79^0 29' 44''$.
Po N. pravilu dobit ćeš $\cos c = \cot g\, \alpha \cdot \cot g\, \beta = \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta}$ ili $\cos\alpha \cos\beta = \cos c \sin\alpha \sin\beta$. Načini $\cos(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$, pa uvrsti nađenu vrijednost za $\cos\alpha \cos\beta$. Obje jednadžbe dijelidbom daju $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cdot \frac{\cos c + 1}{\cos c - 1}$. Izrazi $\cos\alpha$ i $\cos\beta$ pomoću N. pravila s bližim komadima. Dobit ćeš $tg\, \beta = \cos\alpha\, tg\, c$, $tg\, a = \cos\beta \cdot tg\, c$. Dakle $\alpha = 77^0 43' 18''$, $\beta = 50^0 2' 53''$, $a = 73^0 53' 38''$, $\beta = 48^0 54' 54''$.

682. **Riješi sf. trokut iz komada** $\beta - \alpha = 27^0 40' 24''$, $c = 79^0 29' 44''$.
Uputa kao u prijašnjem primjeru. $\alpha = 50^0 2' 53''$, $\beta = 77^0 43' 18''$, $a = 48^0 54' 54''$, $b = 73^0 53' 38''$.

683. **Nađi sfernu daljinu između Londona (geogr. šir.** $\varphi_1 = +51^0 30' 49''$, **geogr. ist. duž.** $\lambda_1 = 0^0 5' 43''$) **i Pontianaka na Borneju** ($\varphi_2 = 0$, $\lambda_2 = 109^0$**ist. duž.**).
$\cos \alpha = \cos \varphi_1 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$; $d = 101^0 38'$. Jer je $1^0 = 111{\cdot}3$ km, slijedi $d = 101{\cdot}63333 \cdot 111{\cdot}3 = 113117{\cdot}8$ *km.*

684. **Nađi sf. daljinu između mjesta, gdje Greenw. meridijan siječe ekvator** ($\varphi_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$) **i Turgai-a u Kirgiskim stepama** ($\varphi_2 = +49^0 29' 18''$, $\lambda_2 = 64^0$ **ist. duž.**)
$\cos d = \cos\varphi_2 \cdot \cos\lambda_2$, $d = 73^0 27' 19'' = 73{\cdot}45528 \cdot 111{\cdot}3 = 81755{\cdot}8$ *km.*

685. **Nađi sfernu daljinu Havre-a** ($\varphi_1 = +49^0 29' 18''$, $\lambda_1 = 0^0 6' 30''$ **ist. duž.**) **i Colomba** ($\varphi_2 = +7^0$, $\lambda_2 = 80^0$ **ist. duž.**).
$\cos d = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$; $d = 82^0 33' 48'' = 82{\cdot}56333 \cdot 111{\cdot}3 = 91892{\cdot}9$ *km.*

686. **Iz Lissabona krene parobrod prema ekvatoru i to zapadno pod kurzom** $\omega = 80^0$. **U kojoj će geogr. dužini stići parobrod na ekvator, ako su koordinate Lissabona** $\varphi_1 = +38^0 42' 30''$, $\lambda_1 = 9^0\, 7' 49''$ **zapad. duž.**
$tg\, d = \sin 38^0 42' 30'' \cdot tg\, 80^0$, gdje d znači katetu sf. trokuta, koja leži u ekvatoru. Dakle $d = 74^0 15' 12''$, $\lambda = 74^0 15' 12'' + 9^0 7' 49'' = 83^0 23' 1''$ *zap. duž.*

687. **Parobrod krene iz New-Yorka** ($\varphi_1 = 41^0$ $\lambda_1 = 74^0$ **zap. d.**) **najkraćim putem prema mjestu, gdje 25. zapadni meridijan siječe ekvator. Za koliko će dana parobrod onamo stići, ako plovi dan i noć brzinom** $50 \frac{km.}{sat}$, **i koji ima kurz?**
Parobrod plovi sf. daljinom d. $\cos d = \cos\varphi_1 \times \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$; $d = 60^0 19' 17'' = 60{\cdot}32139 \cdot 111{\cdot}3 = 67137{\cdot}7$ km; $t = 56$ *dana*; $\sin\omega = \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sin d}$, $\omega = 60^0 18'$.

688. **Dne 25./VI. 1922. bila je deklinacija Sunca** $\delta = 23^0 24' 34''$. **Kad je Sunce izašlo i zapalo u Zagrebu** ($\varphi = 45^0 48' 54''$) **toga dana?**
Iz $\cos t = -tg\, \varphi\; tg\, \delta$ dobiva se vrijeme zalaza. Ako dobiveno vrijeme odbiješ od 12^h, dobit ćeš vrijeme izlaza, $t = 116^0 27' 5'' = 7^h\, 45^{min}\, 48^{sec}$ (vrijeme zalaza). Vrijeme izlaza jest $12^h\, 7^h\, 55^{min}\, 48^{sec} = 4^h\, 14^{min}\, 12^{sec}$.

689. **Kako je dugo Sunce nad horizontom u Zagrebu** ($\varphi = 45^0 48' 54''$), **kad je deklinacija Sunca** $\delta = 19^0 33' 45'$?
$\cos t = -tg\, \varphi\; tg\, \delta$. Odatle $2\, t = 14^h\, 48^{min}\, 54^{sec}$. (Sunce je nad horizontom kroz vrijeme 2 t).

690. **Nađi za Ljubljanu** ($\varphi = 46^0 2' 58''$) **večernju daljinu** k **Sunca u najkraćem danu.**
Večernja je daljina azimut računan ne od južne, nego od zapadne točke. Za najkraći je dan $\delta = -\varepsilon$,

pa slijedi za azimut a da je $\cos a = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi}$; $a =$ $= 55^0 0' 17''$; $k = a - 90^0 = -$ *34⁰59'43''* t. j. *34⁰59'43''* prema jugu.

691. **Kada izlazi i zalazi Vega (α Lire) za mjesto geogr. šir. φ = 50⁰7', ako je deklinacija Vege δ = 38⁰42'24''?** $\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$, $t = 173^0 35' =$ *$1^h\, 14^{min}\, 20^{sec}$*. (= vrijeme zapada) ; izlazi u *$10^h\, 45^{min}\, 40^{sec}$*.

692. **Kako je dugo Sirius (δ = —16⁰36'11'') nad horizontom mjesta geogr. širine φ = 49⁰?** $\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} 49^0 . \operatorname{tg} 16^0 36' 11''$; $t =$ $= 69^0 56' 24'' =$ *$4^h\, 39^{min}\, 45^{sec}$*; dnevni luk = 2t = *$9^h\, 19^{min}\, 30^{sec}$*.

693. **Nađi duljinu dana i vrijeme izlaza Sunca za Paris (φ = 48⁰50') na 10./X. ako je deklinacija Sunca toga dana δ = — 6⁰40'.**
Upotrijebi $\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$. Polovica dnevnoga luka jest $82^0 19' 6'' : 15 = 5^h\, 29^{min}\, 16^{sec}$. Duljina dana jest *$10^h\, 58^{min}\, 32^{sec}$*. Sunce izlazi u $12^h - 5^h\, 29^{min}\, 16^{sec} =$ *$6^h\, 30^{min}\, 44^{sec}$*.

694. **Izračunaj za Varaždin (φ = 46⁰18'29'' sjev. šir.) najdulji dan, izlaz i zapad Sunca toga dana.**
$\varepsilon = 23^0 27' 18''$, $\log \operatorname{tg} \varepsilon = 9{\cdot}63736 - 10$, $\cos t = -$ $- \operatorname{tg} \varphi . \operatorname{tg} \varepsilon$. Najdulji dan traje *$14^h\, 8^{min}\, 10^{sec}$*. Sunce izlazi u *$4^h\, 55^{min}\, 5^{sec}$*, a zapada u *$7^h\, 4^{min}\, 5^{sec}$*.

695. **Odredi na sunčanoj horizontalnoj uri sjenu štapa u 10ʰ prije podne za Varaždin (φ = 46⁰18'29'').**
$\operatorname{tg} x = \sin \varphi . \operatorname{tg} s$. — U 11^h je kut $s = 15^0$, a u 10^h je dvaput tolik t. j. 30^0. Dakle $\operatorname{tg} x = \sin \varphi . \operatorname{tg} 30^0$; $x = 22^0 39' 32''$.

§ 24. KOSOKUTAN TROKUT.

696. **Nađi sfernu daljinu između Zagreba (φ₁ = 45⁰48'54'', λ₁ = 15⁰58'59'') i New-Yorka (φ₂ = 40⁰42'44'', λ₂ = —74⁰0'24'').**
Transformirani kosinusov poučak!
$\cos d = \frac{\sin \varphi_1 . \sin (\varphi_2 + \mu)}{\cos \mu}$, $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{cotg} \varphi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)$.

Izračunaj najprije μ. $\mu = 0^0 58' 45''$. Dakle: $d = 61^0 30' 31'' = 61{\cdot}50861 . 111{\cdot}3 =$ *68459·1 km.*

697. **Nađi sfernu daljinu između Zagreba (φ₁ = 45⁰48'54'' λ₁ = 15⁰58'59'') i Pekinga (φ₂ = 39⁰54'13'', λ₂ = 116⁰28'54'').**
Uputa kao u pređašnjem zadatku. $\mu = 179^0 48' 57''$, $d = 62^0 29' 54'' = 62{\cdot}49833 . 111{\cdot}3 =$ *69560·6 km.*

698. **Nađi sfernu daljinu između Bremena (φ₁ = 53⁰, λ₁ = = 8⁰) i Chicaga (φ₂ = 40⁰, λ₂ = —85⁰).**
Uputa kao u pređašnjim zadacima. $\operatorname{tg} \mu =$ $= \operatorname{cotg} 53^0 . \cos 93^0$, $\mu = 158^0 29' 23''$, $\cos d =$ $= \frac{\sin 53 . \sin 18\, 29' 23''}{\sin 68^0 29' 23''}$; $d = 74^0 12' 7'' = 74{\cdot}20194 . 111{\cdot}3 =$ $=$ *82586·7 km.*

699. **Nađi sfernu daljinu između Londona (φ₁ = 51⁰30'49'', λ₁ = 0⁰5'43'') i Bombaya (φ₂ = 18⁰53'45'', λ₂ = = 72⁰48'57'').**
Uputa kao pređašnjim zadacima.
$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{cotg} 51^0 30' 49'' . \cos 72^0 43' 14''$, $\mu = 13^0 17' 15''$; $\cos d = \frac{\sin 51^0\, 30' 49'' . \sin 32^0 11'}{\cos \mu}$; $d = 64^0 38' 3'' =$ $= 64{\cdot}63416 . 111{\cdot}3 =$ *71937·8 km.*

700. **Kolika je sferna daljina između Moskve (φ₁ = 55⁰45'18'', λ₁ = 37⁰34'18'') i Bagdada (φ₂ = 33⁰19'48'', λ₂ = 44⁰22'30'')?**
Uputa kao u prijašnjim zadacima. $\mu = 35^0 3' 16''$, $d = 21^0 14' 25'' = 21{\cdot}24027 . 111{\cdot}3 =$ *2364 km.*

701. **Riješi kosokutni sferni trokut, ako su zadane njegove stranice** $a = 68^0 17'$, $b = 56^0 15'$, $c = 88^0 8'$.
$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) . \sin (s-c)}{\sin s . \sin (s-a)}}$; za ostale kutove primijeni analogne formule. $\alpha =$ *64⁰56'43''*, $\beta =$ *54⁰10'19''*, $\gamma =$ *102⁰56'28''*.

702. **Riješi trokut iz komada:** $a = 120^0 20'$, $b = 95^0 15'$, $c = 84^0 25'$.
Naputak kao u prijašnjem primjeru.
$\alpha =$ *120⁰2'24''*, $\beta =$ *92⁰49'40''*, $\gamma =$ *86⁰51'26''*.

703. **Riješi trokut, ako su zadani kutovi** $\alpha = 66^0 35'$, $\beta =$ $= 55^0 55'$, $\gamma = 77^0 30'$.

$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos.(\sigma-\alpha)}}$; za ostale stranice vrijede analogne formule. $a=42^\circ21'49''$, $b=43^\circ49'4''$, $c=57^\circ59'48''$.

704. Riješi trokut iz zadanih kutova $\alpha=110^\circ20'$, $\beta=160^\circ50'$, $\gamma=128^\circ50'$.
Uputa kao u prijašnjem primjeru. $a=16^\circ48'50''$, $b=174^\circ11'13''$, $c=166^\circ5'44''$.

705. Riješi trokut iz komada $a=20^\circ32'32''$, $b=68^\circ12'58''$, $\gamma=123^\circ7'37''$.
c nađi pomoću transformiranoga kosinusova poučka. α i β nađi pomoću formula za $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ tg i $\frac{\beta}{2}$. Dakle $c=79^\circ36'23''$, $\alpha=17^\circ49'42''$, $\beta=54^\circ9'40''$.

706. Riješi trokut iz komada $b=78^\circ12'$, $c=57^\circ40'$, $\alpha=115^\circ20'$.
Uputa kao u prijašnjem primjeru (mjesto c traži a!). $a=104^\circ38'28''$, $\beta=65^\circ30'56''$, $\gamma=51^\circ47'22''$.

707. Riješi trokut iz komada $\alpha=48^\circ12'$, $\beta=56^\circ34'$, $c=83^\circ15'$.
$\cos\gamma=\frac{\cos\alpha\,.\,\sin(\beta-\nu)}{\sin\nu}$, $\operatorname{cotg}\nu=\operatorname{tg}\alpha\cos c$; $\nu=82^\circ31'$; $\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)}}$, za *cotg* $\frac{b}{2}$ je analogna formula. a i b mogu se naći i pomoću Napierovih analogija:
$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\,.\,\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\,.\,\operatorname{tg}\frac{c}{2}$; $\gamma=107^\circ6'26''$, a $=50^\circ45'27''$, $b=60^\circ8'31''$.

708. Je li moguć trokut s komadima $a=40^\circ30'$, $b=50^\circ40'$, $\alpha=80^\circ50'$?
Sinusov poučak daje $\sin\beta=\frac{\sin\alpha\sin b}{\sin a}$. To daje $\log\sin\beta=10{\cdot}07032-10=0{\cdot}07032$, a to znači, da je $\sin\beta>1$, što ne može biti.

709. Riješi trokut iz komada : $a=100^\circ$, $b=72^\circ$ $\alpha=38^\circ30'$.
Iz sinusova poučka slijedi : $\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$. Zadatku odgovara samo jedna vrijednost za β, jer je $a+b<180^\circ$, pa mora biti i $\alpha+\beta<180^\circ$.

$\beta=36^\circ57'18''$. Za c i γ upotrijebi Napierove analogije: $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, $c=169^\circ44'$, $\gamma=173^\circ38'$.

710. Riješi trokut iz komada $a=45^\circ15'$, $b=75^\circ15'$, $\alpha=80^\circ20'$.
Upotrijebi za b sinusov poučak, a za c i γ Napierove analogije . $b=75^\circ15'$, $\gamma=45^\circ40'39''$. Iz $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ dobit ćeš : $c=199^\circ13'16''$.

711. Kako visoko stoji Sunce nad horizontom u Zagrebu u 4^h **poslije podne, kad je dan najduži?**
Upotrijebi kosinusov poučak za stranicu :
$\cos(90-h)=\cos(90-\varphi)\,.\,\cos(90-\delta)+\sin(90-\varphi)\times\sin(90-\delta)\,.\,\cos t$; $t=4.15=60^\circ$; $\delta=\varepsilon=23^\circ27'18''$.
Parcijalnim logaritmiranjem izlazi $h=37^\circ14'18''$. Zadatak možeš riješiti i pomoću transformiranoga kosinusova poučka.

712. Kolik ima azimut i visinu Zvijezda α **Štipavca (Antares) u Zagrebu u** 4^h **ujutro, ako je deklinacija te zvijezde** $\delta=-26^\circ15'4''$ **?**
$4^h=4.15=60^\circ$. Na sferni trokut stranica: $90^\circ-\varphi$, $90^\circ-\delta$, $90^\circ-$v i kutova t, $180^\circ-$a i s (nasuprot stranice $90^\circ-\varphi$) primijeni Napierove analogije.
$\operatorname{tg}\frac{a-s}{2}=\frac{\sin\frac{\varphi+\delta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\delta}{2}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a+s}{2}=\frac{\cos\frac{\varphi+\delta}{2}}{\cos\frac{\varphi-\delta}{2}}\,.\,\operatorname{tg}\frac{t}{2}$;
$\operatorname{tg}\frac{90-v}{2}=\frac{\cos\frac{a+s}{2}}{\cos\frac{a-s}{2}}\,.\,\operatorname{tg}\frac{\varphi+\delta}{2}$; $a=42^\circ3'$ ist. azimut, $v=43^\circ50'$.

713. Zvijezda ima u Zagrebu visinu $v=30^\circ15'$ **i zapadni azimut** $a=45^\circ20'$**. Koliko je sati i kolika je deklinacija zvijezde?**
Po Napierovim analogijama traži t i δ. Kut, što ga

zatvaraju v i δ, neka je s. $\mathrm{tg}\,\frac{t+s}{2} = \frac{\cos\frac{\varphi-v}{2}}{\sin\frac{\varphi-v}{2}} \times$ $\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{t-s}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi-v}{2}}{\cos\frac{\varphi+v}{2}} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{90-\delta}{2} = \mathrm{cotg}\,\frac{\varphi+v}{2} \times$ $\frac{\cos\frac{t+s}{2}}{\cos\frac{t-s}{2}}$; $t = 69^0 33' 48'' = 4^h\ 2^m\ 4^{sec}$; $\delta = -15^0 18' 8''$.

714. Na mjestu geogr. širine $\varphi = 50^0 7'$ ima Arctur visinu $v = 27^0 37' 26''$, deklinaciju $\delta = 19^0 47'$ i rektascenziju $AR = 14^h\ 10^m\ 24{\cdot}3^{sec}$; Koliko je sati zvjezdanoga vremena?
$\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-90+\varphi) . \sin(s-90+\delta)}{\sin s \,.\, \sin(s-90+v)}}$; $t = 70^0 15' 2'' = 4^h\ 41^m\ 0{\cdot}3^{sec}$; zvjezdano je vrijeme $= t + AR = 18^h\ 51^m\ 24{\cdot}6^{sec}$.

ANALITIKA.

§ 25. Pravac.

715. Točkama $M_1(3,4)$ i $M_2(-4,2)$ prolazi pravac, a na nj je okomit pravac, koji prolazi točkom $M_3(5,1)$. Koje su jednadžbe tih pravaca.
$p_1 \equiv y - 4 = \frac{2}{7}(x-3)$, $p_2 \equiv y - 1 = -\frac{7}{2}(x-5)$.

716. Iz koordinatnoga ishodišta povuci okomicu na pravac $p \equiv y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{2}$; koju jednadžbu ima ta okomica?
U $y = ax$ mora biti $a = \frac{3}{2}$; dakle $p' \equiv y = \frac{3}{2}x$.

717. Nađi jednadžbe stranica trokuta, koji ima vrhove: $A(8,3)$, $B(-1,4)$, $C(5,2)$.
Jednadžba pravca kroz 2 točke! $p_1 \equiv x + 9y - 35 = 0$, $p_2 \equiv x - 3y + 1 = 0$, $p_3 \equiv x + 3y - 11 = 0$.

718. Zadani su vrhovi trokuta $A(-5,1)$ i $B(3,0)$. Ako ima stranica AC koeficijenat smjera $\frac{7}{11}$, a stranica BC koeficijenat smjera $\frac{8}{3}$, kolika je ploština trokuta?
Pomoću jednadžbe pravca kroz jednu točku odredi

jednadžbe stranica i njihovo sjecište C. $AC \equiv 7x - 11y + 46 = 0$, $BC \equiv 8x - 3y - 24 = 0$, $C(6,8)$; $P = \frac{67}{2}$.

719. Točkom $M_0(4,3)$ prolazi pravac tako, da se odrezak na Y-osi odnosi prema odresku na X-osi kao 2 : 1. Koju jednadžbu ima taj pravac?
$\frac{4}{m} + \frac{3}{n} = 1$, $n : m = 2 : 1$; odatle $m = \frac{11}{2}$, $n = 11$, $p \equiv 2x + y - 11 = 0$.

720. Na pravcu $p_1 \equiv \frac{x}{-8} + \frac{y}{-6} = 1$ leži baza pravokutnika, a duga je 10 cm. Ako je poznat najviši vrh pravokutnika $A(-5,4)$, koje su jednadžbe ostalih stranica i koje su koordinate ostalih vrhova?
Načini jenadžbu pravca kroz točku A okomito na p_1 i riješi je sa zadanom jednadžbom, da dobiješ vrh B. Vrh C, koji leži na p_1 odredi iz formule za udaljenost d t. j. $100 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$ i iz jednadžbe p_1 (jer C leži na tom pravcu). Iz C povuci okomicu na p_1 i iz A okomicu na pravac AB. Njihovo sjecište daje koordinate točke D. $p_2 \equiv 4x - 3y - 18 = 0$; $p_3 \equiv 3x + 4y - 1 = 0$; $p_4 \equiv 4x - 3y + 32 = 0$; $B(-8,0)$, $C(0,-6)$, $D(3,-2)$.

721. Neki pravac zatvara s koord. osima pravokutan trokut, kojemu je visina (v), spuštena na hipotenuzu, duga $\sqrt{41}$ cm. Ako ta visina ima koeficijenat smjera $\mathrm{tg}\,\alpha = 4$, koju jednadžbu ima hipotenuza?
Pravac neka ima oblik $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Iz slike se razabira: $m = \frac{v}{\cos\alpha}$, $n = \frac{v}{\sin\alpha}$ ili $m = \frac{v}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}}$, $n = v . \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}}$; $m = 5$, $n = 4$; $p \equiv 4x + 5y - 20 = 0$.

722. U trokutu, što ga zatvara pravac $p \equiv 3x + 5y - 30 = 0$ s koord. osima, odredi jednadžbu visine spuštene na hipotenuzu i nađi koordinate njezina nožišta.
$y = ax$, $a = \frac{5}{3}$; $v \equiv 5x - 3y = 0$; $N(2\frac{11}{17}, 4\frac{7}{17})$.

723. Nađi ploštinu pravokutnoga trokuta, što ga zatvaraju pravci $p_1 \equiv y = 0$, $p_2 \equiv x + y - 8 = 0$, $p_3 \equiv x - y + 1 = 0$.

Ploština P pravokut trokuta jednaka je poluproduktu kateta, ili se izračuna po formuli $2P = x_1(y_2 - y_3) +$ itd. Da izračunaš dužine katete, odredi vrhove trokuta. $P = 20 \cdot 25$.

724. Nađi jednadžbu pravca, koji prolazi točkom $M_0(8,9)$, a okomit je na pravac $p_1 \equiv x + y - 8 = 0$, i nađi sjecište tih pravaca.

Pravac kroz jednu tačku, u kojem je koeficijenat smjera $a = 1$! $p_2 \equiv x - y + 1 = 0$, $S(3 \cdot 5,\ 4 \cdot 5)$.

725. Poznata su dva vrha trokuta $B(1,5)$ i $C(-3,-1)$. Stranica AB zatvara s pozit. X-osi kut $\alpha_1 = 120^0$, a stranica AC zatvara s pozit. X-osi kut $\alpha_2 = 150^0$. Nađi jednadžbu stranice BC i kut α_3, što ga ona zatvara s pozit. X-osi. Koje koordinate ima vrh A?

Nađi jednadžbu stranica AB i AC, pa ih riješi, da dobiješ koordinate točke A. Zatim nađi jednadžbu pravca kroz točku A i C, a iz koeficijenta smjera nađi α_3. $AB \equiv y - 5 = -\sqrt{3}\,(x - 1)$; $AC \equiv y + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3)$, $BC \equiv 3x - 2y + 7 = 0$, $\alpha_3 = 56^0 18' 34''$ $A\left[3 + 3\sqrt{3}, -2(\sqrt{3} + 2)\right]$.

726. Zadani su vrhovi trokuta $A(7,1)$, $B(5,6)$, $C(2,2)$. Nađi jednadžbu visine, spuštene u tom trokutu iz vrha B i odredi koordinate nožišta te visine.

Nađi jednadžbu pravca, koji prolazi točkama A i C, a zatim jednadžbu pravca, koji je okomit na pravac AC, a prolazi točkom B. Da dobiješ nožište visine, riješi te dvije dobivene jednadžbe. $AC \equiv x + 5y - 12 = 0$, $v \equiv 5x - y - 19 = 0$, $N\left(\frac{107}{26}, \frac{41}{26}\right)$.

727. Nađi jednadžbu pravca, koji s pozitivnim koordinatnim osima zatvara trokut ploštine $P = 27$, a prolazi točkom $M_0(4,3)$.

Uzmi segmentni oblik pravca $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. Trokut je pravokutan, pa mu je ploština $P = \frac{m \cdot n}{2}$. Te dvije jednadžbe daju $nx + my = 54$, a jer M_0 leži na tom pravcu, slijedi: $4n + 3m = 54$. Jer je $m = \frac{54}{n}$, slijedi:

$4n^2 - 54n + 162 = 0$. Odatle: $n_1 = 9$, $n_2 = \frac{9}{2}$, $m_1 = 6$, $m_2 = 12$. Moguća su dakle dva pravca: $p_1 \equiv 3x + 2y - 18 = 0$; $p_2 \equiv 3x + 8y - 36 = 0$.

728. Koliki kut zatvaraju među sobom pravci $p_1 \equiv 8x - 13y + 65 = 0$, $p_2 \equiv 13x - 8y - 65 = 0$. Gdje se sijeku ti pravci?

Odredi koeficijente smjera tih pravaca i uvrsti ih u formulu za $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$. Kod toga treba uzeti takav poredak koeficijenata, da $tg\ \varphi$ bude pozitivna veličina (jer se uvijek misli šiljasti kut pravaca). $\varphi = 26^0 47' 8''$, $S(13, 13)$.

729. U kojoj se točki sijeku pravci $p_1 \equiv x + y + 1 = 0$, $p_2 \equiv 7x + 3y - 5 = 0$ i koji kut zatvaraju?

Riješi te jednadžbe. Kut nađi pomoću $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$. $M_0(2, -3)$, $\varphi = 21^0 48' 4''$.

730. U kojoj se točki sijeku pravci $p_1 \equiv 2x - 3y + 5 = 0$, $p_2 \equiv 3x + 2y - 25 = 0$ i kolik kut zatvaraju s pozitiv. X-osi?

Riješi jednadžbe. Kutove izračunaj iz koeficijenata smjera. $M_0(5, 5)$; $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2}{3}$; $\alpha_1 = 33^0 41' 24''$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{3}{2}$; $\alpha_2 = 123^0 41' 47''$.

731. Koji kut zatvaraju pravci $p_1 \equiv 17x - 13y - 1 = 0$, $p_2 \equiv 13x + 7y - 77 = 0$?

Upotrijebi formulu za $\operatorname{tg} \varphi$! $\varphi = 65^0 42' 21''$.

732. Nađi sjecište pravaca $p_1 \equiv x + \sqrt{3}y - 12 = 0$, $p_2 \equiv x - \sqrt{3}\,y - 12 = 0$ i kut, što ga zatvaraju.

Riješi jednadžbe! $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}$. $M_0(12, 0)$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\varphi = 30^0$.

733. Nađi ploštinu trokuta, kojemu su zadani vrhovi $A(2, -7)$; $B(5,5)$; $C(-4,1)$.

$2P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$. $P = 48$.

734. Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove $A(0,0)$, $B(6,-5)$, $C(8,6)$.

Postupak kao u prijašnjem zadatku. $P = 38$.

735. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(7,—4), B(0,6), C(—1,2).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 19.$

736. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(6,0), B(4,1), C(—10,3).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 5.$

737. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(—3,—6); B(4,8), C(—5,—4).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 21.$

738. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(8,3), B(—1,4), C(5,2).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 6.$

739. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(0,8), B(0,—4), C(5,0).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 30.$

740. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(—6,0), B(0,0), C(16,4).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 20.$

741. **Nađi ploštinu trokuta, koji ima vrhove A(2,3), B(7,5), C(5,3).**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $P = 10.$

742. **Nađi jednadžbu pravca kroz točku $M_0(4,3)$, kojem su presjeci A na Y-osi i B na X-osi tako smješteni, da vrijedi relacija $AM_0 : M_0B = 2 : 1$.**
$\lambda = \frac{AM_0}{M_0B} = 2$; A(0,n), B(m,0) i $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $\lambda = 2$, $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{3}$; $p \equiv 3x + 2y - 18 = 0.$

743. **Paralele s Y-osi na mjestima $x = 1$, $x = 9$ omeđuju na pravcu $y = x - 2$ pružac. Po kojemu omjeru dijeli taj pružac paralelu s Y-osi na mjestu $x = 4$ i koliki su odresci na prušcu?**
Nađi krajnje točke i djelište (uvrštavanjem vrijednosti od x u jednadžbu zadanoga pravca) i načini omjer odrezaka. $\lambda = \frac{3}{5}$, $M_1M_2 = 8\sqrt{2}$, $M_1M_0 = 3\sqrt{2}$, $M_0M_2 = 5\sqrt{2}$.

744. **Nađi koordinate točke M_0, koja dijeli dužinu M_1M_2 po zlatnom rezu, ako je dano $M_1(1,2)$, $M_2(8,4)$.**
Iz $\overline{M_1M_0}^2 = \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_0M_2}$ dobivaš $\lambda = \frac{M_1M_0}{M_0M_2}$, a prema $\overline{M_1M_0} = s_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, gdje je $r = \overline{M_1M_2}$ slijedi: $\lambda = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Iz $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ slijedi:
$x_0 = \frac{2(5+4\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}$, $y_0 = \frac{4(2+\sqrt{5})}{3+\sqrt{5}}$.

745. **Kroz točku $M_0(4,5)$ povuci pravac, koji ima daljinu od koord. ishodišta $d = +\frac{10}{\sqrt{29}}$.**
Jednadžbu pravca kroz jednu točku (M_0) svedi na normalni Hesseov oblik. Dobit ćeš: $\frac{-a + y - 5 + 4a}{\pm\sqrt{a^2+1}} = 0$. Odatle $\frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{-5+4a}{\pm\sqrt{a^2+1}}$. Nakon kvadriranja ove jednadžbe dobit ćeš: $364a^2 - 29.40a + 625 = 0$ ili $a_1 = \frac{455}{182}$, $a_2 = \frac{125}{182}$. Supstitucijom tih koeficijenata u jednadžbu pravca kroz jednu točku (M_0) dobit ćeš — nakon skraćivanja s 91 — jednadžbu $p \equiv 5x - y - 10 = 0$. Druga jednadžba: $125x - 182y + 410 = 0$ ne odgovara zadatku, jer ima negativnu udaljenost.

746. **Kolika je daljina pravca $p \equiv 6{\cdot}6x + 11{\cdot}2y - 26 = 0$ od koordinatnog ishodišta?**
Svedi jednadžbu na normalni Hesseov oblik. Njezin 3. član znači traženu udaljenost. $d = 2.$

747. **Kolika je daljina pravca $p \equiv y = -2x - 8$ od koord. ishodišta?**
Svedi jednadžbu na općeni oblik, a onda na normalni Hesseov oblik. $d = -\frac{8}{\sqrt{5}}$.

748. **Kolika je daljina koord. ishodišta od pravca $p \equiv 3x - 2y + 4 = 0$.**
Promijeni predznake u jednadžbi prije negoli načiniš normalni Hesseov oblik, jer koeficijenat ispred y mora biti pozitivan. $d = -\frac{4}{\sqrt{13}}$.

749. **Nađi daljinu pravca $p \equiv 7x - 24y - 75 = 0$ od koord. ishodišta.**
Normalni oblik pravca! U zadanoj jednadžbi promijeni prije predznake, jer koeficijenat ispred y mora biti pozitivan. $d = 3$.

750. **Nađi daljinu pravca $p \equiv -9x + 12y - 60 = 0$ od koord. ishodišta.**
Normalni Hesseov oblik! $d = 4$.

751. **Nađi daljinu pravca $p \equiv 12x + 5y + 26 = 0$ od koord. ishodišta.**
Normalni Hesseov oblik! $d = -2$.

752. **Nađi daljinu pravca $p \equiv y = \frac{4}{3}x - 5$ od koord. ishodišta.**
Normalni Hesseov oblik! $d = 3$.

753. **Nađi udaljenost točke M_0 (7,5) od pravca $p \equiv 2x + 3y + 5 = 0$ i udaljenost toga pravca od koord. ishodišta.**
Normalni Hesseov oblik! $\delta = -\frac{34}{\sqrt{13}}$, $d = -\frac{5}{\sqrt{13}}$.

754. **Nađi jednadžbu pravca povučenoga kroz točku M_0 (5,5) okomito na pravac $p \equiv 2x + y + 3 = 0$ i udaljenost koord. ishodišta od toga pravca.**
Primijeni jednadžbu pravca kroz jednu točku. Koeficijenat smjera traženoga pravca jest $-\frac{1}{2}$. Za udaljenost koord. ishodišta od pravca svedi nađenu jednadžbu na normalni Hesseov oblik. $p' \equiv x - 2y + 5 = 0$; $d = -\sqrt{5}$.

755. **Nađi ploštinu P pravokutnoga trokuta, što ga s koord. osima zatvara pravac $p \equiv \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ i to pomoću visine spuštene na hipotenuzu.**
Visina je udaljenost pravca p od koord. ishodišta. Normalni Hesseov oblik! $v = \frac{12}{\sqrt{13}}$, $P = 12$.

656. **Kolika je međusobna udaljenost d pravaca $p_1 \equiv 3x + 2y - 12 = 0$, $p_2 \equiv 3x + 2y - 6 = 0$?**

$d = d_1 - d_2$. Nađi treće članove u jednadžbama zadanih pravaca svedenim na normalni Hesseov oblik. $p_1 \equiv \frac{3x+2y-12}{-\sqrt{9+4}} = 0$, $p_2 \equiv \frac{3x+2y-6}{-\sqrt{9+4}} = 0$, $d_1 = \frac{12}{\sqrt{13}}$, $d_2 = \frac{6}{\sqrt{13}}$, $d = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

757. **Nađi dužinu visine spuštene na hipotenuzu trokuta, što ga s koord. osima zatvara pravac $p \equiv 12x + 5y + 26 = 0$.**
Dužinu visine daje 3. član u jednadžbi zadanoga pravca svedenoj na normalni oblik $p \equiv \frac{12x+5y+26}{-\sqrt{144+25}} = 0$; $v = -\frac{26}{13} = -2$.

758. **Koliki je razmak d pravaca $p_1 \equiv \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, $p_2 \equiv \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$?**
$d = d_2 - d_1$; d_1 i d_2 odredi iz normalnoga Hesseovog oblika jednadžbe pravca. $d = \frac{12}{5} = 2 \cdot 4$.

759. **Nađi daljinu točke $M_0(-3,4)$ od pravca $p \equiv 3y = 4x - 6$.**
U normalni Hesseov oblik pravca uvrsti koordinate točke M_0. $\delta = 6$.

760. **Nađi daljinu točke $M_0(3,5)$ od pravca $p \equiv 4x + 3y + 5 = 0$.**
Postupak kao u prijašnjem zadatku. $\delta = -6 \cdot 4$.

761. **Nađi daljinu točke $M_0(10,5)$ od pravca $p \equiv -9x + 12y - 60 = 0$.**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $\delta = -6$.

762. **Nađi daljinu točke $M_0(2,3)$ od pravca $p \equiv 12x + 5y + 26 = 0$.**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $\delta = -5$.

763. **Nađi daljinu točke $M_0(1,3)$ od pravca $p \equiv y = \frac{4}{3}x - 5$.**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $\delta = 4$.

764. **Nađi daljinu točke $M_0(4,13)$ od pravca $p \equiv 3x + 2y - 12 = 0$.**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $\delta = -2\sqrt{13}$.

765. **Nađi daljinu točke $M_0(5,5)$ od pravca $p \equiv 7x - 24y - 75 = 0$.**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. Da bude koeficijenat ispred *y* pozitivan, promijeni predznake! $\delta = 6 \cdot 4$.

766. **Nađi daljinu točke $M_0(3,5)$ od pravca $p \equiv y = 3x + 1$.**
Postupak kao u prijašnjim zadacima. $\delta = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

767. **Kolika je visina v_b u trokutu, koji ima vrhove $A(4,5)$, $B(-6,-2)$ i $C(2,-6)$?**
Odredi jednadžbu pravca *AC* i prikaži je u normalnom Hesseovom obliku, pa u nju uvrsti koordinate točke *B*. Dobit ćeš $AC \equiv -11x + 2y + 34 = 0$. Odatle $v_b = \frac{96}{5\sqrt{5}}$.

768. **Kako su daleko vrhovi *A* i *C* od dijagonale *BD* četverokuta, koji je zadan s vrhovima $A(2,0)$, $B(2,6)$, $C(-2,2)$, $D(-2,-4)$?**
Pomoću jednadžbe pravca kroz 2 točke nađi jednadžbu dijagonale i svedi je na normalni Hesseov oblik, pa uvrsti u nju koordinate točke *A*, odnosno *B*. $BD \equiv -5x + 2y - 2 = 0$. Tražene su daljine $-\frac{12}{\sqrt{29}}, \frac{18}{\sqrt{29}}$.

769. **Na pravcu $p_1 \equiv y = x - 10$ leži točka apscise 4; kako je ta točka daleko od pravca $p_2 \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$?**
Koordinate točke jesu 4,—6. Udaljenost njezina od p_2 jest $\delta = \frac{-\sqrt{3}\,x_0 + 3\,y_0}{2\sqrt{3}} = -(2 + 3\sqrt{3})$.

770. **Odredi jednadžbu pravca, koji zatvara s pozitiv. X-osi kut od 60°, a od točke $M_0(9,1)$ ima daljinu $\delta = -5$.**
$p \equiv y = \sqrt{3}\,x + b$; $\frac{-\sqrt{3}\,x_0 + y_0 - b}{\sqrt{3+1}} = -5$ (normalni oblik!). Odatle: $b = 11 - 9\sqrt{3}$; $p \equiv y = \sqrt{3}x + 11 - 9\sqrt{3}$.

771. **Točka $M_0(1,3)$ ima od pravca, koji ide točkom $A(3,2)$ daljinu $\delta = 2$; koji je to pravac?**

$p \equiv y - 2 = a(x - 3)$. Svedi tu jednadžbu na normalni oblik i uvrsti koordinate točke M_0! Dobit ćeš: $\frac{1 + 2a}{\pm\sqrt{a^2 + 1}} = 2$, ili $\frac{1 + 4a + 4a^2}{a^2 + 1} = 4$; odatle: $a = \frac{3}{4}$. $p \equiv 3x - 4y - 1 = 0$.

772. **Temeljne zrake pramena: $4x - 5y - 60 - \lambda(2x + 5y) = 0$ određuju na X-osi neku dužinu. Nađi jednadžbu one zrake toga pramena, koja tu dužinu dijeli u omjeru 2 : 3.**
Krajnje točke dužine dobit ćeš tako, da u jednadžbe: $4x - 5y - 60 = 0$ i $2x + 5y = 0$ staviš $y = 0$. Te su točke $A(15,0)$, $B(0,0)$. Točka *C*, koja dužinu $AB = 15$ dijeli u omjeru 2 : 3, jest $C(6,0)$. Te koordinate uvrsti u zadani pramen, da odrediš λ. Dobit ćeš $\lambda = -3$. $p \equiv x + y - 6 = 0$.

773. **Točkom $(-6,5)$ položi pravac paralelan s onom zrakom pramena $7x - 12y + 108 - \lambda(16x - y - 176) = 0$, koja prolazi točkom $\left(5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$.**
U jednadžbu zadanoga pramena uvrsti koordinate $\left(5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$. Dobit ćeš zraku $23x - 13y - 68 = 0$. Traženi ćeš pravac dobiti iz jednadžbe pravca kroz jednu točku $(-6,5)$ stavivši $a = \frac{23}{13}$. Dakle: $23x - 13y + 203 = 0$.

774. **Sjecištem pravaca $p_1 \equiv \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1$, $p_2 \equiv 2x + y + 8 = 0$ povuci pravac paralelan s pravcem $p_3 \equiv 4x - 3y - 9 = 0$. Koju jednadžbu ima taj pravac?**
U pravcu $p_1 + \lambda p_2 = 0$ odredi koeficijenat smjera i izjednači ga s koeficijentom smjera pravca p_3. Dobit ćeš: $-\frac{3 + 2\lambda}{7 + \lambda} = \frac{4}{3}$ ili $\lambda = -3 \cdot 7$. $p_4 \equiv 4x - 3y + 46 = 0$.

775. **Baza trokuta ima krajnje točke $A(0,9)$, $B(11,0)$. Stranica AC ima jednadžbu $7x - 12y + 108 = 0$, a stranica *BC* jednadžbu $16x - y - 176 = 0$. Nađi jednadžbu težišnice spuštene na bazu AB.**
Odredi raspolovište *D* baze AB; $D\left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Upotrijebi $p_1 + \lambda p_2 = 0$; $t \equiv 23x - 13y - 68 = 0$.

776. **Nađi jednadžbu pravca, koji prolazi točkom $M_0(4,3)$ i sjecištem pravaca $p_1 \equiv 7x - 6y + 9 = 0$, $p_2 \equiv x - 5y + 6 = 0$.**
U $p_1 + \lambda p_2 = 0$ uvrsti M_0, da odrediš λ. $\lambda = \frac{19}{5}$, $p \equiv 54x - 125y + 159 = 0$.

777. **Nađi jednadžbu pravca, koji prolazi točkom $M_0(11,4)$ i sjecištem pravaca $p_1 \equiv 8x - 13y + 65 = 0$, $p_2 \equiv 13x - 8y - 65 = 0$.**
U $p_1 + \lambda p_2$ uvrsti M_0, da odrediš λ. $\lambda = \frac{7}{2}$; $p \equiv 9x - 2y - 91 = 0$.

778. **Nađi jednadžbu pravca, koji prolazi koordinatnim ishodištem i presjecištem pravaca $p_1 \equiv 7x - 10y + 28 = 0$, $p_2 \equiv 7x + 2y - 56 = 0$, a da ne tražiš presjecišta.**
$p \equiv p_1 + \lambda p_2 = 0$; $\lambda = \frac{1}{2}$; $p \equiv 7x - 6y = 0$.

779. **Točkama $A(-3,-2)$, $B(3,5)$ prolazi pravac p_1, a točkama $C(-6,0)$, $D(4,2)$ pravac p_2. Njihovim sjecištem neka prolazi pravac p_3, koji s pozitiv. X-osi zatvara kut $80^0 40'$. Nađi jednadžbu tih pravaca (Stavi tg $80^0 40' = 6$).**
$p_1 \equiv 7x - 6y + 9 = 0$, $p_2 \equiv x - 5y + 6 = 0$, $p_3 \equiv p_1 + \lambda p_2 = 0$ t. j. $p_3 \equiv x(7 + \lambda) - y(6 + 5\lambda) + 9 + 6\lambda = 0$. Koeficijenat smjera jest dakle $\frac{7+\lambda}{6+5\lambda}$. Iz $\frac{7+\lambda}{6+5\lambda} = 6$ slijedi $\lambda = -1$. Uvrstivši to u p_3 dobit ćeš: $p_3 \equiv 6x - y + 3 = 0$.

780. **Sjecištem pravaca $p_1 \equiv 7x - 10y + 28 = 0$, $p_2 \equiv 7x + 2y - 56 = 0$ povuci dva pravca, koji će s X-osi zatvarati istokračan trokut, a produženje jedne trokutove stranice treba da čini s Y-osi odrezak — 3·5. Koje jednadžbe imaju ovi pravci i koje su koordinate vrhova trokuta?**
Nađi sjecište zadanih pravaca i uvrsti njegove koordinate u $y = ax - 3 \cdot 5$. Dobit ćeš $p_3 \equiv 7x - 4y - 14 = 0$. Da bude trokut istokračan, mora p_4 zatvarati s pozit. X-osi kut $180 - \alpha$. Pomoću jednadžbe pravca kroz točku (sjecište) dobit ćeš $p_4 \equiv 7x + 4y - 70 = 0$. Vrhovi su $A(2,0)$, $B(10,0)$, $C(6,7)$. Zadatak možeš riješiti i pomoću pramena $p_1 + \lambda p_2 = 0$.

781. **Zadana su dva pramena i to jedan s temeljnim zrakama $p_1 \equiv 3x - 5y + 1 = 0$ $p_2 \equiv x - y + 4 = 0$, a drugi s $p_3 \equiv x + 2y - 3 = 0$, $p_4 \equiv 2x + 3y - 6 = 0$. Nađi kut onih zraka obiju pramenova, koje prolaze točkom $M_0(3,-2)$.**
Pramen $(p_1, p_2) \equiv 3x - 5y + 1 + \lambda(x - y + 4) = 0$; pramen $(p_3, p_4) \equiv x + 2y - 3 + \mu(2x + 3y - 6) = 0$. U te jednadžbe uvrsti M_0, da odrediš λ i μ. $p_5 \equiv 7x - 25y - 71 = 0$; $p_6 \equiv x - 3 = 0$; tg $\varphi = \frac{25}{7}$, $\varphi = 74^0 21' 28''$.

782. **Nađi 3. i 4. harmoničku zraku pramena, kojemu pripadaju zrake $p_1 \equiv 7x - 6y + 42 = 0$, $p_2 \equiv 11x + 5y - 55 = 0$, ako treća harmonička zraka prolazi točkom $C(-3,0)$.**
U $7x - 6y + 42 + \lambda(11x + 5y - 55) = 0$, uvrsti koordinate točke C. Dobit ćeš $\lambda = \frac{21}{88}$. Za 3. je harmoničku zraku $\lambda = + \frac{21}{88}$, a za 4. zraku $\lambda = -\frac{21}{88}$. Prema tome $p' \equiv 847x - 423y + 2541 = 0$, $p'' \equiv 385x - 633y + 4851 = 0$.

783. **Kolika je daljina od koord. ishodišta one zrake pramena $x + y + 1 + \lambda(-x + y - 9) = 0$, koja prolazi točkom $M_0(-7,-2)$?**
Odredi λ pomoću M_0 i dobivenu jednadžbu svedi na normalni Hesseov oblik. —
$p \equiv y = 3x + 19$; $d = -\frac{19}{\sqrt{10}}$.

784. **Jedna krajnja točka dijagonale pravokutnika jest $A(-5,4)$, a druga je sjecište stranica $p_1 \equiv 3x + 4y + 24 = 0$, $p_2 \equiv 4x - 3y - 18 = 0$. Nađi jednadžbe obiju dijagonala i njihovu dužinu d.**
p_1 i p_2 smatraj temeljnim zrakama pramena, a dijagonalu zrakom toga pramena, koji prolazi točkom A. Iz A povuci paralelu s p_1 i riješi dobivenu jednadžbu s p_2, da dobiješ vrh D. Iz A povuci okomicu na p_1 i dobivenu jednadžbu riješi s p_1, da dobiješ

B. Stranice *AB* i p, smatraj temeljnim zrakama pramena, u kojem je druga dijagonala jedna zraka (koja prolazi točkom *D.*) $d_1 \equiv 2x+y+6=0$, $d_2 \equiv 2x+11y+16=0$, $d=5\sqrt{5}$.

785. **Sjecištem pravaca $p_1 \equiv 17x-13y-1=0$, $p_2 \equiv x+y-8=0$ i točkom $M_0(0,11)$ položi pravac i odredi njegovu jednadžbu.**
$p \equiv p'_1 p_2 - p_1 p'_2 = 0$. $p \equiv 13x+7y-77=0$.

786. **Sjecištem pravaca $p_1 \equiv x+y-8=0$, $p_2 \equiv x-y+1=0$, i točkom $M_0(-3,-4)$ položi pravac. Koja mu je jednadžba?**
$p \equiv p'_1 p_2 - p_1 p'_2 = 0$, $p \equiv 17x-13y-1=0$.

787. **U pramenu $7x-12y+108-\lambda(16x-y-176)=0$ odredi zraku okomitu na pravac $p_0 \equiv 5x+6y-30=0$.**
U $p_1+\lambda p_2=0$ odredi koeficijenat smjera i stavi, da je jednak $+\frac{6}{5}$. Dobit ćeš $\lambda=\frac{1}{2}$; $p \equiv 6x-5y+8=0$.

788. **Kroz vrhove pramena: $11x+8y-33-\lambda(11x+4y+51)=0$ i $4x-5y-60-\mu(2x+5y)=0$ povuci pravac i odredi njegovu jednadžbu. — Jedan vrh ne treba odrediti!**
$S_1(-5,11)$; te koordinate uvrsti u $4x-5y-60-\mu(2x+5y)=0$, da odrediš μ. Dobit ćeš $\mu=-3$; $p \equiv x+y-6=0$.

789. **Gdje se sijeku simetrale kutova u trokutu, koji ima stranice dane s $p_1 \equiv -6x+2\cdot 5y+15=0$, $p_2 \equiv -8x+15y-40=0$, $p_3 \equiv 3x+4y+24=0$?**
Uputa kao u prijašnjem zadatku. $S_{12} \equiv 154x-140y+5=0$, $S_{13} \equiv 11x+3y+18=0$, $S_{23} \equiv 11x+143y+208=0$, $M(-\frac{195}{154}=-1\cdot 3, -\frac{19}{14}=-1\cdot 4)$.

790. **Gdje se sijeku simetrale kutova trokuta, kojemu stranice imaju jednadžbe $p_1 \equiv 4x+3y-24=0$, $p_2 \equiv 3x+4y+8=0$, $p_3 \equiv -4x+3y-24=0$?**
$S_{12} \equiv p_1+p_2=0$, $S_{13} \equiv p_1+p_3=0$, $S_{23} \equiv p_2+p_3=0$, gdje su p_1, p_2, p_3 u normalnom Hesseovu obliku. $S_{12} \equiv 7x+7y-16=0$, $S_{13} \equiv x=0$, $S_{23} \equiv x-7y+16=0$; $M(0,\frac{16}{7})$.

791. **Nađi jednadžbu simetrale tupoga i šiljastoga kuta, što ga zatvaraju pravci $p_1 \equiv 12x+5y-34=0$, $p_2 \equiv 3x+4y+13=0$.**
Simetrala šiljastoga kuta jest $S_1 \equiv p_1+p_2=0$, a tupoga kuta $S_2 \equiv p_1-p_2=0$, gdje su p_1 i p_2 u normalnom obliku. $S_1 \equiv 7x-9y-113=0$; $S_2 \equiv 99x+77y-1=0$.

792. **Nađi jednadžbu simetrale šiljastoga kuta, što ga zatvaraju pravci $p_1 \equiv 7x-11y+46=0$, $p_2 \equiv 8x-3y-24=0$.**
$S \equiv p_1+p_2=0$, gdje p_1 i p_2 moraju biti u normalnom Hesseovu obliku. $S \equiv \sqrt{73}\,(7x-11y+46)+\sqrt{170}\,(8x-3y-24)=0$.

793. **Predoči jednadžbe pravaca $p_1 \equiv \varrho(6\cos\varphi-11\sin\varphi)+24=0$, $p_2 \equiv \varrho(2\cos\varphi-\sin\varphi)-8=0$ i njihovo sjecište u pravokutnim Kart. koordinatama.**
Uvrsti $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$, tg $\varphi=\frac{y}{x}$; $p_1 \equiv 6x-11y+24=0$, $p_2 \equiv 2x-y-8=0$. Da dobiješ sjecište, riješi dobivene jednadžbe. $S(7,6)$.

794. **Prikaži pravce $p_1 \equiv x+y-2=0$, $p_2 \equiv 3x+y-5=0$ i njihovo sjecište u polarnim koordinatama.**
Uvrsti $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\cdot\sin\varphi$. $p_1 \equiv \varrho(\cos\varphi+\sin\varphi)-2=0$, $p_2 \equiv \varrho(3\cos\varphi+\sin\varphi)-5=0$, $S\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ ili $\varrho=\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $tg\,\varphi=\frac{1}{3}$, $\varphi=18^0 26' 6''$.

795. **Prikaži pravce $p_1 \equiv 5x-4y-20=0$, $p_2 \equiv 4x+3y-12=0$ i njihovo sjecište u polarnim koordinatama.**
Uputa kao u prijašnjem zadatku. $p_1 \equiv \varrho(5\cos\varphi-4\sin\varphi)-20=0$, $p_2 \equiv \varrho(4\cos\varphi+3\sin\varphi)-12=0$, $S\left(\frac{108}{31},-\frac{20}{31}\right)$ ili $\varrho=\frac{4}{31}\sqrt{754}$, tg $\varphi=-\frac{5}{27}$; $\varphi=169^0 30' 41''$.

796. **Prikaži pravce $p_1 \equiv x+2y-6=0$, $p_2 \equiv x-3y-6=0$ i njihov presjek u polarnim koordinatama.**
Uvrsti u jednadžbe i u sjecište tih pravaca $x=$

$= \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$. $p_1 \equiv \varrho\,(\cos \varphi + 2 \sin \varphi) - 6 = 0$, $p_2 \equiv \varrho\,(\cos \varphi - 3 \sin \varphi) - 6 = 0$. Sjecište S ima koordinate u Kartezijevu koord. sustavu $S(6,0)$, a u polarnom $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = 6$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{0}{6} = 0$, $\varphi = 0$.

§ 26. KRUG.

797. Nađi sjecišta krugova $K_1 \equiv x^2 + y^2 = 36$, $K_2 \equiv x^2 + (y-3)^2 = 9$.
Riješi jednadžbe po x i y. Krugovi se dotiču u točki $M_0(0,6)$.

798. Nađi polumjer i koordinate p i q središta kruga $K \equiv 2x^2 + 2y^2 + 6x - 10y + 1 = 0$.
Podijeli jednadžbu kruga s 2. Jer je p jednak polovici koeficijenta ispred x s protivnim predznakom, bit će $p = -\frac{3}{2}$; analogno za q t. j. $q = \frac{5}{2}$. $r = \sqrt{p^2 + q^2 - c} = 2\sqrt{2}$.

799. Koji krug dotiče obje koordinatne osi i prolazi točkom $M_0(-8,-1)$?
$K \equiv (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, $p = q = r$. To daje $p^2 + 18p + 65 = 0$ ili $p_1 = -5$, $p_2 = -13$; $q_1 = -5$, $q_2 = -13$, $r_1 = 5$, $r_2 = 13$; $K_1 \equiv (x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$; $K_2 \equiv (x+13)^2 + (y+13)^2 = 169$.

800. Krug ima središte dano s $C(2,-3)$, a pravac $p \equiv 15x - 8y - 105 = 0$ mu je tangenta. Koji je to krug?
Udaljenost točke C od pravca p! $r = 3$, $K \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$.

801. Zadan je deltoid s vrhovima $A(0,-1)$, $B(8,2)$, $C(0,5)$ i $D(-4,2)$. Nađi središte M i polumjer r upisana kruga.
BD je simetrala kutova. Načini još simetralu kuta kod C ili kod A. Sjecište tih simetrala jest središte kruga. $M(0{\cdot}64, 2)$, $r = 2{\cdot}78$.

802. Neki krug K siječe krug $K_1 \equiv x^2 + y^2 = 9$ u dvije točke. Jedna je od njih ona, u kojoj pozitivna X-os

siječe krug K_1, a druga ima apscisu $+1$ i pozitivnu ordinatu. Ako ima biti centrala d tih krugova duga 9 cm, koja je to jednadžba kruga K_2?
$M_1(3,0)$, $M_2(1, 2\sqrt{2})$; $d^2 = p^2 + q^2$, $(3-p)^2 + q^2 = r^2$, $(1-p)^2 + (2\sqrt{2} - q)^2 = r^2$. Riješi ove tri jednadžbe. Moguća su dva kruga: $K \equiv (x \mp 3\sqrt{6})^2 + (y - 3\sqrt{3})^2 = 90 \mp 18\sqrt{6}$.

803. Trokut zatvaraju tangente kruga potegnute u točkama $M_1(0,2)$, $M_2(3,7)$, $M_3(5,-3)$ toga kruga. Koje su jednadžbe stranica i toga kruga?
Najprije nađi jednadžbu kruga, a onda jednadžbe tangenata u M_1, M_2 i M_3. Ploštinu trokuta odredi iz nađenih vrhova trokuta. Jednaždba kruga ima oblik $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. $K \equiv 2x^2 + 2y^2 - 21x - 9y + 10 = 0$. Tangenta ima oblik $(x_0 - p) \times (x-p) + (y_0 - 2)(y-2) = r^2$. $T_1 \equiv 21x + y - 2 = 0$; $T_2 \equiv 9x - 19y + 106 = 0$; $T_3 \equiv x + 21y + 58 = 0$.

804. Riješi jednadžbe i protumači geometrijski njihovo značenje: $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 43 = 0$, $x - y - 1 = 0$.
Krug i pravac sijeku se u $M_1(9,8)$, $M_2(3,2)$.

805. Koji krug ima središte na X-osi, a prolazi koord. ishodištem i točkom $M_0(4,5)$?
U jednadžbu kruga uvrsti $q = 0$ i koordinate točaka. Dobit ćeš $r = \frac{41}{8}$, $K \equiv 4y^2 = 41x - 4x^2$.

806. Koji krug ima središte u $C(4,0)$, a ima polumjer $r = 5$?
$K \equiv (x-4)^2 + y^2 = 25$ ili $K \equiv x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$.

807. Nađi središte i polumjer kruga $K \equiv x^2 + y^2 - 12x + 10y - 39 = 0$. $C(6,-5)$, $r = 10$.

808. Sjecištem pravaca $p_1 \equiv x - y = 0$, $p_2 \equiv x - 13 = 0$ i jednom točkom, u kojoj presijeca krug $x^2 + y^2 - 25 = 0$ pozitivnu X-os, odnosno Y-os, prolaze dva pravca. Koje su njihove jednadžbe?
Riješi pomoću pramena $p \equiv p_1 + \lambda p_2$ odredivši za svaki pravac pripadni λ. Jedan pravac prolaz točkom

(5,0), a drugi točkom (0,5). $p_1 \equiv 8x - 13y + 65 = 0$, $p_2 \equiv 13x - 8y - 65 = 0$.

809. **Koji krug prolazi točkama $M_1(3,5)$, $M_2(0,-3)$, $M_3(-4,2)$?**
Jednadžbu kruga $x^2 + y^2 + ax + by + C = 0$ zadovoljavaju koordinate zadanih točaka. Dobivene 3 jednadžbe određuju koeficijente *a, b, c*.
$K \equiv 47x^2 + 47y^2 - 37x - 133y - 822 = 0$.

810. **Krug prolazi točkama A(2,0), B(4, 6), C(—3, —1); koji je to krug i kolik mu je polumjer?**
Jer koordinate tih točaka moraju zadovoljavati jednadžbu kruga $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dobit ćeš uvrštavanjem tih koordinata 3 jednadžbe, koje određuju koeficijente *a, b, c*. $K \equiv x^2 + y^2 + 3x - 9y - 10 = 0$, $r = \frac{\sqrt{130}}{2}$.

811. **Koji krug prolazi točkama A(2, 2), B(6, 5), a središte mu je na *X*-osi?**
Koordinate točaka *A* i *B* moraju zadovoljavati jednadžbu kruga $K \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Jer je središte na X-osi, slijedi $q = 0$ ili $b = 0$.
$K \equiv 4x^2 + 4y^2 - 53x + 74 = 0$.

812. **Koje vrijednosti moraju imati veličine y_1, x_2, y_3, ako hoćemo, da točke $A(2, y_1)$, $B(x_2, -12)$ i $C(6, y_3)$ budu na kružnici (2, 1, 13)?**
Uvrsti koordinate zadanih točaka u $K \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ i iz dotične tri jednadžbe izračunaj *a, b, c*. Dobit ćeš $y_1 = 14$ ili $y_1 = -12$, $x_2 = 2$, $y_3 = 1 \pm 3\sqrt{17}$.

813. **Nađi jednadžbu kruga, koji prolazi točkama $M_1(2,3)$, $M_2(3,4)$, $M_3(1,-3)$.**
U $K \equiv x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ uvrsti koordinate zadanih točaka, pa iz triju dobivenih relacija nađi *a, b, c*. $K \equiv 5x^2 + 5y^2 - 69x + 9y + 46 = 0$.

814. **Nađi jednadžbu kruga, koji prolazi točkom $M_0(5,-2)$ i sjecištima krugova $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0$.**
Tražena jednadžba ima oblik $K \equiv K_1 - \lambda K_2 = 0$.
$K \equiv 6x^2 + 6y^2 - 43x - 11y + 19 = 0$.

815. **Nađi jednadžbu kruga opisana trokutu, koji ima vrhove $M_1(-8, 0)$, $M_2(7, -5)$, $M_3(0,8)$ i ploštinu toga trokuta.**
U $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ odredi koeficijente kao u zadatku 810.
$K \equiv 2x^2 + 2y^2 - x + y - 136 = 0$. $P = 80$.

816. **Koji krug prolazi točkama $M_1(-4, 4)$, $M_2(-4, -12)$, a ima polumjer $r = 8$?**
Uzmi općenu jednadžbu kruga i odredi koeficijente. Treća je uvjetna jednadžba : $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = r^2$. — $K \equiv x^2 + y^2 + 8x + 8y - 32 = 0$.

817. **Nađi jednadžbu kruga, koji dotiče krugove $K_1(3, 0, 1)$ $K_2(-3, -3, 4)$, a središte mu leži na centrali zadanih krugova.**
Načini sliku! Nađi sjecište centrale i krugova : $M_1\left[3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}}\right), -\frac{1}{\sqrt{10}}\right]$, $M_2\left[\frac{3}{10}\left(7 + \sqrt{79}\right), \frac{\sqrt{79}-3}{10}\right]$.
Jednadžba centrale jest : $y = \frac{1}{3}(x-3)$. Jer je centrum traženoga kruga u središtu dužine $\overline{M_1 M_2}$, bit će njegove koordinate $p = \frac{3}{20}\left\{17 - \sqrt{10} + \sqrt{79}\right\}$, $q = \frac{1}{20}(\sqrt{79} - \sqrt{10} - 3)$, $r^2 = \left\{\frac{M_1 M_2}{2}\right\}^2 = \frac{49 - 3\sqrt{10} - 3\sqrt{79} + \sqrt{790}}{10}$.

818. **Nad dijametrom kruga $x^2 + y^2 = 100$ zatvaraju tetive $t_1 \equiv y = \sqrt{3}x - 10$ i t_2 pravokutan trokut. Kako glasi jednadžba tetive t_2 i kolika je ploština p trokuta?**
Tetiva t_1 siječe krug u $M_1(5\sqrt{3}, 5)$ i $M_2(0, -10)$. Prema tome je (vidi na slici!) $M_3(0, 10)$.
$t_2 \equiv y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + 10$, $p = 50\sqrt{3}$.

819. **Nad dijametrom kruga $K \equiv x^2 + y^2 = 100$ zatvaraju tetive trokut. Jedna je od njih $t_1 \equiv y = x - 10$.**
Nađi ploštinu trokuta P.
Nađi presjeke tetive t_1 s krugom. $t_2 \equiv x + y = 10$. $P = 100$.

820. **Krug, koji prolazi točkom $A(5{\cdot}5, 3)$ dijeli pružac omeđen točkama $M_1(-1, 4)$ i $M_2(4, -1)$ u 3 jednaka dijela; gdje mu je središte?**
Središte leži na simetrali prušca $\overline{M_1 M_2}$, koji ima jednadžbu $y = x$; dakle $p = q$, Jedno djelište na prušcu jest (za $\lambda = 1/2$) $M_3 \left\{\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right\}$. Kad se koordinate od A i M_3 uvrste u $K \equiv (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, dobiva se $p = q = \frac{219{\cdot}25}{99} = 2{\cdot}21$.

821. **Kolik kut α zatvara radij-vektor točke $M_0(2, 4+\sqrt{5})$ na krugu $K \equiv (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$ s radij-vektorom njegova središta?**
Odredi anomalije jedne i druge točke. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4+\sqrt{5}}{2} = 3{\cdot}1180$, $\operatorname{tg}\varphi' = 1$, $\varphi = 72^0 13' 6''$, $\varphi' = 45^0$, $\alpha = \varphi - \varphi' = 27^0 13' 6''$.

822. **Kolik kut α zatvaraju radij-vektori sjecišta krugova $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 7y + 10 = 0$, $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 3x - 7y + 8 = 0$?**
Nađi sjecišta M_1 i M_2 i njihove anomalije. $M_1(2,6)$, $M_2(2,1)$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = 3$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2 = 39^0 22' 41''$.

823. **Nađi sjecište krugova $K_1 \equiv x^2 + y^2 = 36$, $K_2 \equiv (x-6)^2 + (y-6)^2 = 36$.**
Riješi te jednadžbe po x i y. $M_1(0,6)$, $M_2(6, 0)$.

824. **Nađi dužinu one tetive kruga $K \equiv (x-4)^2 + (y-9)^2 - 25 = 0$, koja prolazi točkom $P_0(6, 7)$ unutar kruga, a okomita je na polumjer, koji prolazi tom točkom.**
Nađi potenciju $(-n^2)$ te točke; $-n^2 = (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 9)^2 - 25$; $n = \sqrt{17}$. Dužina tetive jest $2n$ t. j. $2\sqrt{17}$.

825. **Nađi središte S kruga upisanoga u trokut s vrhovima $A(-4, -3)$, $B(3, -1)$, $C(0, 3)$.**
Simetrale kutova sijeku se u središtu kruga. Nađi dakle dvije simetrale kuta i njihovo sjecište. $AC \equiv 3x - 2y + 6 = 0$, $BC \equiv 4x + 3y - 9 = 0$, $AB \equiv 2x - 7y - 13 = 0$. $S(0, 3)$

826. **Prikaži krug $K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ u polarnim koordinatama.**
Uvrsti $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$. $K \equiv \varrho^2 - 6\varrho\cos\varphi - 10\varrho\sin\varphi + 30 = 0$.

827. **Prikaži krug $\varrho = 8$ u pravokutnim koordinatama.**
Jer je $\varrho^2 = x^2 + y^2$, slijedi $K \equiv x^2 + y^2 - 64 = 0$.

828. **Prikaži krug $\varrho = 10\cos\varphi$ u pravokutnim koordinatama.**
Pomnoživši jednadžbu s ϱ i uzevši u obzir, da je $\varrho^2 = x^2 + y^2$, a $\varrho\cos\varphi = x$, dobit ćeš $K \equiv x^2 + y^2 - 10x = 0$.

829. **Kolika je anomalija φ točke $M_0(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ kruga $K \equiv x^2 + y^2 - 64 = 0$.**
$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = 1$; $\varphi = 45^0$.

830. **Tangente $T_1 \equiv y = 0$, $T_2 \equiv 15x - 8y - 105 = 0$ dotiču krug $K(2, -3, 3)$. Nađi polaru s obzirom na sjecište tih tangenata.**
Riješi jednadžbe T_1 i T_2, da dobiješ sjecište P_0; $P_0(7, 0)$. *Polara* $\Pi \equiv 5x + 3y - 10 = 0$.

831. **Nađi polaru točke $P_0(20, 10)$ s obzirom na krug $K \equiv (x-4)^2 + (y-9)^2 = 25$.**
$\Pi \equiv (x_0 - 4)(x-4) + (y_0 - 9)(y-9) - 25 = 0$, $\Pi \equiv 16x + y - 98 = 0$.

832. **Nađi jednadžbu pravca p, koji ide točkom $M_0(6, 6)$, a paralelan je s polarom kruga $K \equiv (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16$ s obzirom na tu točku. Kolika je udaljenost traženoga pravca od polare?**
Polara: $\Pi \equiv 2x + 3y - 33 = 0$; $p \equiv 2x + 3y - 30 = 0$;

za traženu udaljenost primijeni normalni oblik (Hesseov) pravca; $\delta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

833. **Polara kruga K(4, 2, 5) ima jednadžbu** $\Pi \equiv 2x - y - 11 = 0$. **Nađi njezin pol s obzirom na taj krug.**
$\Pi \equiv (x_0 - 4)(x - 4) + (y_0 - 2)(y - 2) - 25 = 0$. Zadanu jednadžbu polare pomnoži s λ (jer je možda poprimila zadani oblik radi skraćenja) i izjednači koeficijente tih dviju jednadžbi t. j. $2\lambda = x_0 - 4$, $-\lambda = y_0 - 2$, $-11\lambda = -4x_0 - 2y_0 - 5$. Odatle: $\lambda = 5$, $x_0 = 14$, $y_0 = -3$.

834. **Nađi polaru točke** $P_0(-5, 5)$ **s obzirom na krug** $K \equiv (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$.
$\Pi \equiv (x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 + 4)(y + 4) = 16$,
$\Pi \equiv 8x - 9y - 44 = 0$.

835. **Kolik mora biti polumjer** r **kruga sa središtem C(5,4), da mu bude pravac** $p \equiv y = 3x$ **tangenta i kolika je dužina** d **te tangente računajući je od koordinatnog ishodišta do dotačišta?**
Polumjer je udaljenost točke C od pravca p. $r = \frac{11}{10}\sqrt{10}$; $d = \frac{1}{10}\sqrt{2890} = 5{\cdot}37$.

836. **Nađi jednadžbe tangenata na krug** $K \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0$ **povučenih iz točke** $P_0(2, 4)$.
Riješi pomoću polare $\Pi \equiv x + 2y - 8 = 0$ riješivši njezinu jednadžbu i jednadžbu kruga. Dotačišta su $M_1(0, 4)$, $M_2\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$. $T_1 \equiv y - 4 = 0$, $T_2 \equiv 4x + 3y - 20 = 0$.

837. **Koje se tangente dadu povući iz točke** $P_0(8,4)$ **na krug** $K \equiv x^2 + y^2 = 25$?
Ako se uzme oblik tangente $T \equiv Ax + By + C = 0$, onda je uvjet za tangentu: $r^2(A^2 + B^2) = C^2$. Jer je jednadžba tangente $ax - y + 4 - 8a = 0$ (jednadžba pravca kroz točku P_0 svedena na opći oblik), slijedi $A = a$, $B = -1$, $C = 4 - 8a$. Uvjet dakle glasi: $a = \frac{32 \pm \sqrt{55}}{39}$.

$T_1 \equiv (32 + 5\sqrt{55})\,x - 39y - 100 - 40\sqrt{55} = 0$, $T_2 \equiv (32 - 5\sqrt{55})\,x - 39y - 100 + 40\sqrt{55} = 0$.

838. **Nađi jednadžbe tangenata kruga** $K \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0$ **povučenih iz točke izvan kruga** $M_0(0,6)$.
Tangenta prolazi kroz točku M_0, pa zato $y - 6 = ax$ svedi na općeni oblik $Ax + By + C = 0$ i primijeni uvjet za tangentu: $r^2(A^2 + B^2) = C^2$. (Vidi prijašnji zadatak). Dobit ćeš: $a = \pm 2\sqrt{2}$; dakle $T_{1,2} \equiv y = \pm 2\sqrt{2}x + 6$.

839. **Koja se tangenta dade povući u točki** $M_0(3,0)$ **kruga** $K(11, -6, 10)$?
$T \equiv (x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2$.
$T \equiv 4x - 3y - 12 = 0$.

840. **Koje se tangente dadu povući iz** $M_0(2,4)$ **na krug** $K \equiv x^2 + y^2 - 10 = 0$?
Primijeni uvjetnu jednadžbu $r^2(A^2 + B^2) = C^2$, gdje A i B znače koeficijente ispred x i y u jednadžbi pravca kroz točku M_0 svedenoj na općeni oblik, a C njezin općeni član. (Vidi zad. 837.) $T_1 \equiv x - 3y + 10 = 0$, $T_2 \equiv 3x + y - 10 = 0$.

841. **Koje se tangente dadu povući iz** $M_0(5,5)$ **na** $K \equiv x^2 + y^2 = 49$?
Primijeni $r^2(A^2 + B^2) = C^2$. Vidi zad. 837. — $T_1 \equiv 3x + 4y - 35 = 0$, $T_2 \equiv 4x + 3y - 35 = 0$.

842. **Iz** $M_0(12,10)$ povuci tangentu na $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.
Primijeni $r^2(A^2 + B^2) = C^2$. Vidi zad. 837. —
$T_{1,2} \equiv y = \frac{56 \pm 10\sqrt{22}}{39}\,x - \frac{6(47 \pm 20\sqrt{22})}{39}$.

843. **Odredi jednadžbu tangente u točki** $M_0(3,4)$ **kruga** $x^2 + y^2 = 25$.
$x_0x + y_0y = 25$. $T \equiv 3x + 4y - 25 = 0$.

844. **Nađi jednadžbu kruga, koji ima središte C(3,2), a tangenta mu je** $T \equiv \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$.

Udaljenost točke C od pravca T, t. j. $r = \frac{p-2q-6}{\sqrt{5}}$; $K \equiv (x-3)^2 + (y-2)^2 - \frac{1}{5} = 0$.

845. Nađi jednadžbu tangente kruga $K \equiv x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$, koja ima dirališteu $M_0(3,12)$. $T \equiv 3x + 12y - 25 = 0$.

846. U točkama kruga $K \equiv (3,-2,4)$ $A(3+2\sqrt{2}, 0)$ i $B(3+2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ povučene su tangente; gdje se sijeku?
Riješi jednadžbe tangenata. $P\,[11, 2(3-4\sqrt{2})]$.

847. Tangente kruga $K \equiv x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ sijeku se u točki $P(7,0)$ i zatvaraju s polarom, kojoj je P pol, trokut. Nađi ploštinu toga trokuta.
Polara je $\Pi \equiv 3x - y + 6 = 0$. Ostala ćeš dva vrha trokuta dobiti, kad riješiš jednadžbe kruga i polare. $M_1\left(-\frac{1}{5}, +\frac{27}{5}\right)$, $M_2(-2,0)$. — Ploština $p = \frac{134}{10} = 13{\cdot}4$.

848. Nađi dotačište tangente $T \equiv x - y - 5 - 4\sqrt{2} = 0$ kruga K (3,—2,4.)
Riješi jednadžbe tangente i kruga. $M_0\,(3 + 2\sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2})$.

849. Gdje se sijeku tangente kruga K (2,4,5), koje imaju dotačišta $M_1(6,1)$, $M_2(6,7)$?
Načini jednadžbe tangenata i riješi ih po x i y. — $M_0\left(\frac{33}{4}, 4\right)$.

850. Zadana je tačka $P(4{\cdot}2, 0)$ izvan kruga $K \equiv x^2 + y^2 = 6{\cdot}25$. Nađi jednadžbe tangenata iz te točke na krug.
Nađi polaru točke P i riješi jednadžbu kruga i polare. Time dobivaš dotačišta tangenata. Zatim primijeni jednadžbu pravca kroz dvije točke.
$T_{1,2} \equiv y = \pm\frac{\sqrt{11{\cdot}39}}{2{\cdot}5}\,(x - 4{\cdot}2)$.

851. Iz točke $P(9,9)$ povuci tangente na krug $K(3,3,6)$.
Riješi pomoću polare $\Pi \equiv x + y - 12 = 0$. Dotačišta su $M_1(9,3)$, $M_2(3,9)$; $T_1 \equiv x = 9$, $T_2 \equiv y = 9$.

852. Nađi pomoću polare jednadžbe tangenata povučenih iz točke $P_0(10, 10)$ na krug $K \equiv x^2 + y^2 = 25$.
Riješi jednadžbu polare i kruga, da dobiješ dotačišta tangenata. $T_{1,2} \equiv y = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}x \pm \frac{10}{3}(\sqrt{7} \mp 1)$.

853. Krug ima središte u $C(2,-3)$, a pravac mu $p \equiv 3x + 4y - 6 = 0$ ima biti tangenta. Koji je to krug?
Primijeni formulu za udaljenost točke (C) od pravca (p). $K \equiv (x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{144}{25}$.

854. Koje se tangente dadu povući iz točke $P\left(\frac{79}{3}, 2\right)$ na krug $K \equiv x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$?
Riješi pomoću polare $\Pi \equiv x - 10 = 0$. Dotačišta su $M_1(10, 9)$, $M_2(10, -5)$; $T_1 \equiv 3x + 7y - 93 = 0$, $T_2 \equiv 3x - 7y - 65 = 0$.

855. Koje se tangente dadu povući iz točke $P_0(7, 0)$ na krug $K \equiv (x+5)^2 + y^2 - 25 = 0$?
Riješi pomoću polare $\Pi \equiv 12x + 35 = 0$. Dotačišta su $M_1\left(-\frac{35}{12}, \frac{5}{12}\sqrt{119}\right)$, $M_2\left(-\frac{35}{12}, -\frac{5}{12}\sqrt{119}\right)$;
$T_1 \equiv 5x + \sqrt{119}\,y - 35 = 0$, $T_2 \equiv 5x - \sqrt{119}\,y - 35 = 0$.

856. Nađi dužinu tangente položene točkom $M_0(0,0)$ na krug $K \equiv (x-4)^2 + (y-9)^2 - 25 = 0$.
Nađi potenciju (t^2) točke M_0 s obzirom na krug. $t^2 = (x_0 - 4)^2 + (y_0 - 9)^2 - 25$; $t = 6\sqrt{2}$.

857. Pravci su $p_1 \equiv \sqrt{3}\,x + y + 5\sqrt{3} - 2 = 0$, $p_2 \equiv \sqrt{3}\,x - y + 5\sqrt{3} + 2 = 0$, $p_3 \equiv y + 10 = 0$ tangente kruga. Koji je taj krug?
Upotrijebi udaljenost točke (središta kruga) od pravaca (tangenata). Dobit ćeš 3 jednadžbe $\sqrt{3}p + q + 5\sqrt{3} - 2 = -2r$; $\sqrt{3}p - q + 5\sqrt{3} + 2 = -2r$; $q + 10 = r$. Odatle: $p = -(8\sqrt{3} + 5)$, $q = 2$, $r = 12$.
$K \equiv x^2 + y^2 + 2(8\sqrt{3} + 5)x - 4y + 77 + 80\sqrt{3} = 0$.

858. Nađi radikalno središte S kružnica $K_1 \equiv x^2 + y^2 = 36$, $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$, $K_3 \equiv x^2 + y^2 - 28x - 4y + 175 = 0$.

Nađi potencijale $s_{1,2} \equiv K_1 - K_2 = 0$, $s_{1,3} \equiv K_1 - K_3 = 0$ i njihovo sjecište. $s_{1,2} \equiv 10x + 12y - 81 = 0$, $s_{1,3} \equiv 28x + 4y - 211 = 0$. $S\left(9\frac{43}{37}, \frac{79}{148}\right)$.

859. **Nađi potenciju točke $P_0(5, 2)$ s obzirom na krug $K \equiv x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$. Koje značenje ima ta potencija?**
$x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 9 = -20$, $n^2 = -20$. Potencija $-n^2$ znači kvadrat polovice tetive, položene u P_0 okomito na CP_0, ako C znači središte kruga, a P_0 je unutar kruga.

860. **Nađi potencijalu s kružnica $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$, $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 12x + 10y - 39 = 0$.** $s \equiv K_1 - K_2 = 0$, $s \equiv 2x - 5y + 15 = 0$.

861. **Zadani su krugovi $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 36 = 0$, $K_2 \equiv (x - 5)^2 + (y - 6)^2 - 16 = 0$, $K_3 \equiv (x - 5)^2 + (y + 6)^2 - 16 = 0$. Koliki kut zatvara potencijala $s_{1,2}$ krugova K_1 i K_2 s potencijalom $s_{1,3}$ krugova K_1 i K_3?**
$s_{1,2} \equiv 10x + 12y - 81 = 0$, $s_{1,3} \equiv 10x - 12y - 81 = 0$,
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{60}{11}$, $\varphi = 79^0 36' 40''$.

§ 27. ELIPSA.

862. **Nađi jednadžbu elipse, koja ima središte u koordinatnom ishodištu, a prolazi točkama $A(-4, 0)$, $B(0, -3)$, ako njezine osi leže u koord. osima.**
U jednadžbu elipse uvrsti koordinate zadanih točaka. Dobivene dvije jednadžbe određuju a i b. $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$.

863. **Koje zajedničke točke ima elipsa $E \equiv x^2 + 4y^2 = 4$ s pravcem $p \equiv y = 2x + 1$ i kolika je tetiva, koja spaja te točke?**
Riješi jednadžbu elipse i pravca. $M_1(0, 1)$, $M_2\left(-\frac{16}{17}, -\frac{15}{17}\right)$; $d = \frac{16}{17}\sqrt{5}$.

864. **Nađi jednadžbu pravca, koji prolazi gornjim tjemenom krivulje $E \equiv 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$, a dijeli tetivu, koja leži na pravcu $y = x$ u omjeru $\lambda = \frac{1}{2}$.**
Jednadžba pravca kroz točku $T(0,3)$ i $M\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; $p \equiv y = \frac{3\sqrt{13}+2}{2}\, x + 3$.

865. **Pod kojim kutom siječe pravac $p \equiv x + y = 1$ elipsu $E \equiv x^2 + 4y^2 = 4$?**
Traži kut tangente u sjecištu pravca i elipse sa zadanim pravcem. Tangente su $T_1 \equiv y = 1$, $T_2 \equiv y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, $\varphi_1 = 45^0$, $\varphi_2 = 78^0 41' 25''$.

866. **Nađi linearni (e) i numerički (ε) ekscentricitet, parametar (p) elipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 144$ i ploštinu trokuta, što ga s X-osi zatvaraju radij-vektori točke elipse, kojoj pripada apscisa $x = +e$.**
Svedi jednadžbu elipse na oblik $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $a = 6$, $b = 4$, $p = \frac{8}{3}$, $e = 2\sqrt{5}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Ploština $P = 2\,e\,p = \frac{16}{3}\sqrt{5}$.

867. **Elipsu $E \equiv 9y^2 = 72x - 4x^2$ siječe pravac, koji prolazi II. kvadrantom, u točkama $M_1(3, y_1)$ i $M_2(15, -y_2)$. Koliko je taj pravac udaljen od koord. ishodišta.?**
$M_1(3, 2\sqrt{5})$, $M_2(15, -2\sqrt{5})$; $p \equiv 5x + 3\sqrt{5}\,y - 45 = 0$. Tu jednadžbu svedi na Hesseov normalni oblik; 3. je član tražena udaljenost d; $d = \frac{9}{14}\sqrt{70}$.

868. **Apscisa dotačišta tangenata elipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$ jednaka je pozitivnoj žarišnoj daljini elipse. Kolik kut zatvaraju te tangente?**
$e = +\sqrt{5}$, $y = p = \pm\frac{4}{3}$. Dotačište jest $M_0(\sqrt{5}, p)$.
$T_1 \equiv \sqrt{5}x + 3y - 9 = 0$, $T_2 \equiv \sqrt{5}x - 3y - 9 = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $\varphi = 73^0 23' 54''$.

869. **Na elipsi $E \equiv 16x^2 + 25y^2 = 400$ ima tangenta dotačište $M_0(-3, 3{\cdot}2)$. Okomica na tu tangentu, koja prolazi koord. ishodištem, i produžena velika os**

elipse zatvaraju s tom tangentom trokut. Kolika je ploština P trokuta?
Pomoću jednadžbe tangente, okomice i velike osi nađi sjecišta. $T \equiv 3x - 5y + 25 = 0$; $N \equiv 5x + 3y = 0$. Vrhovi su trokuta $A\left(-\frac{25}{3}, 0\right)$, $B(0,0)$, $C\left(-\frac{75}{34}, \frac{75}{34}\right)$, $P = \frac{625}{34}$.

870. **Elipsu $3x^2 + 4y^2 = 12$ pomakni paralelno sa samom sobom tako, da joj lijevo tjeme dođe u koord. ishodište. Koju će imati jednadžbu?**
$E \equiv y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, $E \equiv y^2 = 3x - \frac{3}{4}x^2$.

871. **Ekscentriciteta (e) elipse jest 4, a parametar $p = 3$. Odredi jednadžbu elipse.**
$e^2 = a^2 - b^2$, $p = \frac{b^2}{a}$; $a = \frac{3 + \sqrt{73}}{2}$, $b^2 = \frac{3(3 + \sqrt{73})}{2}$;
$E \equiv 6x^2 + (3 + \sqrt{73})\, y^2 = 3(40 + 3\sqrt{73})$.

872. **Nađi jednadžbu elipse, kojoj je lijevo tjeme u koord. ishodištu, a prolazi točkama $M_1(10, 0)$, $M_2(5, 3)$.**
$E \equiv y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$. Uvrsti ovamo koordinate. Izlazi $a = 5$, $p = \frac{9}{5}$, $E \equiv 9x^2 + 25y^2 - 90x = 0$.

873. **Pomakni elipsu $E \equiv 25x^2 + 36y^2 = 900$ paralelno samoj sebi tako, da njezino lijevo tjeme padne u točku, $P(-3, -4)$.**
Novo je koordinatno ishodište u točki $O'(-3, -4)$; $x' = x - 3$, $y' = y - 4$. $E \equiv 25(x+3)^2 + 36(y+4)^2 = 900$.

874. **Zadana je elipsa $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$. Koju jednadžbu ima tetiva, koja prolazi točkom $M_0(2, 1)$, a paralelna je s pravcem $p \equiv -\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$?**
U $y - y_0 = A(x - x_0)$ mora biti prema zadaći $A = \frac{5}{4}$. Dakle $t \equiv 5x - 4y - 6 = 0$.

875. **Nađi ploštinu trokuta, što ga zatvara Y-os s tangentom i normalom u točki M_0 (5, 3) elipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$.**
Nađi jednadžbu tangente i normale, a zatim sjecišta njihova s Y-osi $(x = 0)$. $T \equiv 15x + 16y - 43 = 0$;

$N \equiv 16x - 15y - 35 = 0$. Iz formule za $2P$ dobit ćeš: $P = \frac{1235}{96} = 12 \cdot 86$.

876. **Nađi tangente na elipsu $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$, kojih dotačišta imaju apscisu $x = 2$ i kut, što ga zatvaraju te tangente.**
Nađi y iz jednadžbe elipse za $x = 2$ i primijeni jednadžbu tangente, kad je poznato dotačište.
$T_1 \equiv 4x + 3y - 18 = 0$, $T_2 \equiv 4x - 3y - 18 = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{24}{7}$, $\varphi = 73^0 44' 23''$.

877. **Nađi tangente elipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ u točkama, gdje elipsu siječe pravac $p \equiv x + y = 0$.**
Riješi E i p po x i y, pa ćeš dobiti dotačišta, koja uvrsti u jednadžbu tangente. $T_1 \equiv 9x - 16y - 60 = 0$, $T_2 \equiv 9x - 16y + 60 = 0$.

878. **Nađi sjecišta elipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ i sekante, koja prolazi točkom $M_0(2, 2)$, a okomita je na pravcu $p \equiv 2x + 3y + 6 = 0$.**
Pravac kroz točku M_0! $S \equiv 3x - 2y - 2 = 0$. Ovu jednadžbu i jednadžbu zadane elipse riješi po x i y.
$x = \frac{4}{45}(6 \pm \sqrt{397})$, $y = -\frac{1}{15}(3 \mp 2\sqrt{397})$.

879. **Zadana je elipsa s poluosima $a = 5$, $b = 3$. Nađi jednadžbe tangenata, kojih dotačišta imaju apscisu $x = 3$ i kut, što ga zatvaraju te tangente.**
U jednadžbu elipse uvrsti $x = 3$, pa ćeš dobiti y i primijeni jednadžbu tangente, kad je poznato dotačište. $T_1 \equiv 9x + 20y - 75 = 0$, $T_2 \equiv 9x - 20y - 75 = 0$; $\varphi = 48^0 27' 19''$.

880. **Koje su tangente na elipsu $E \equiv 16x^2 + 9y^2 = 144$ okomite na pravcu $p \equiv \frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$?**
Iz tangente $16x_0x + 9y_0y = 144$ i iz jednadžbe p slijedi $16x_0 = -15y_0$. To uvršteno u E daje dotačišta $M_1\left(-\frac{15}{\sqrt{41}}, \frac{16}{\sqrt{41}}\right)$, $M_2\left(\frac{15}{\sqrt{41}}, -\frac{16}{\sqrt{41}}\right)$; $T_1 \equiv 5x - 3y + 3\sqrt{41} = 0$, $T_2 \equiv 5x - 3y - 3\sqrt{41} = 0$.

881. **Kolika je udaljenost δ pola $P(4, 3)$ od njegove polare na elipsi $E \equiv 6x^2 + 8y^2 = 48$?**

$\Pi \equiv x + y - 2 = 0$; $\delta = \frac{x_0 + y_0 - 2}{-\sqrt{2}} = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

882. **U kojim se točkama sijeku s osi apscisa tangente na elipsu $E \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ povučene iz točke $M_0(3, 6)$?**

Riješi pomoću polare $\Pi \equiv 2x + 9y - 6 = 0$. Našavši dotačišta uvrsti ih u jednadžbu pravca kroz 2 točke. $T_1 \equiv y - 6 = \frac{6}{0}(x - 3)$ ili $\frac{y-6}{x-3} = \infty$; odatle $T_1 \equiv x - 3 = 0$; $T_2 \equiv 8x - 9y + 30 = 0$; $A(3, 0)$, $B(-3\frac{3}{4}, 0)$.

883. **Koju ima jednadžbu polara točke $P(4, 6)$ s obzirom na $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$ i kolik kut zatvara s pozitivnom X-osi?**

$\Pi \equiv 4x_0 x + 9y_0 y = 36$; $\Pi \equiv 8x + 27y - 18 = 0$, $\alpha = 156^0\,2'\,14''$.

884. **Pomoću polare nađi tangente na elipsu $E \equiv 25x^2 + 36y^2 = 900$ povučene iz točke $P_0(0, 10)$.**

$\Pi \equiv y = \frac{5}{2}$; dotačišta su $M_1(5\sqrt{3}, \frac{5}{2})$, $M_2(-5\sqrt{3}, \frac{5}{2})$; $T_{1,2} \equiv 25\sqrt{3}x + 18y \mp 180 = 0$.

885. **Ako tangente spuštene iz točke $M_1(2, 4)$ na elipsu $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ zatvaraju s tangentom u točki $(0, -2)$ te elipse trokut, kolika je ploština P nastaloga trokuta?**

Vidi analognu uputu zadatka 770. ili zad. 819. Uvjet za tangente $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$ daje $5a^2 + 16a - 12 = 0$, gdje a znači koeficijenat tangente. Dobit ćeš $a_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{41}}{5}$; $T_{1,2} \equiv y = \frac{-8 \pm 2\sqrt{41}}{5} \times (x - 2) + 4$; $T_3 \equiv y = -2$. Vrhovi trokuta: $M_1(2, 4)$, $M_2\left(\frac{12\sqrt{41} + 2}{25}, -2\right)$, $M_3\left(\frac{2 - 12\sqrt{41}}{25}, -2\right)$; $P = -\frac{72}{25}\sqrt{41}$.

886. **Odredi jednadžbe tangenata na elipsu $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ iz točke $M_0(5, 3)$.**

Uputa je analogna onoj zadatka 838. ili zadatka 850. Odredi pomoću polare ili pomoću uvjetne jednadžbe $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$. Ovdje taj uvjet glasi: $9a^2 - 30a = 0$; $T_1 \equiv y = 3$, $T_2 \equiv 10x - 3y - 41 = 0$.

887. **Nađi jednadžbe tangenata povučenih iz točke $M_0(5, 2)$ na $E \equiv 9x^2 + 4y^2 = 36$ i kut, što ga zatvaraju te tangente.**

Tangente odredi pomoću polare ili pomoću uvjetne jednadžbe $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$, gdje su A i B koeficijenti ispred x i y, a C apsolutni član u jednadžbi pravca kroz točku M_0 svedenoj na općeni oblik. $T_1 \equiv y = 2 + \frac{10 + \sqrt{205}}{21}(x - 5)$, $T_2 \equiv y = 2 + \frac{10 - \sqrt{205}}{21}(x - 5)$; $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sqrt{205}}{8}$, $\varphi = 60^0\,48'\,22''$.

888. **Nađi jednadžbu normale na elipsu $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$ u točki $M_0(2, \frac{2}{3}\sqrt{5})$.**

$N \equiv y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$; $N \equiv 45x - 12\sqrt{5}y - 50 = 0$.

889. **Što znači izraz $\varrho = \frac{9}{5 - 4\cos\varphi}$?**

Svedi na oblik $\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$. U tu svrhu podijeli brojnik i nazivnik s 5. Jer je $\varepsilon = \frac{4}{5} < 1$, izraz znači elipsu s poluosima $a = 5$, $b = 3$.

§ 28. HIPERBOLA.

890. **Nađi parametar i ekscentricitete e i ε hiperbole $H \equiv x^2 - y^2 = 16$. Kakva je to hiperbola?**

Jednadžbu svedi na oblik $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a = b = 4$, $e = 4\sqrt{2}$, $\varepsilon = \sqrt{2}$. *Istostrana hiperbola.*

891. **Nađi središte i poluosi hiperbole $H \equiv 16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y - 36 = 0$.**

Svedi na oblik $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$. Središte $S(3, 2)$, $a = 3$, $b = 4$.

892. **U kojim se točkama sijeku hiperbola $H \equiv x^2 - y^2 = 9$ i pravac paralelan s Y-osi na mjestu $x = 5$?**

Riješi jednadžbu hiperbole i pravca. $M_1(5, 4)$, $M_2(5, -4)$.

893. **Odredi osi, ekscentricitete, parametar i jednadžbe asimptota hiperbole** $H \equiv 25x^2 - 36y^2 = 900$.
$a = 6,\ b = 5,\ e = \sqrt{61},\ \varepsilon = \frac{\sqrt{61}}{6} = 1{\cdot}8,\ p = \frac{25}{6};\ y = \pm\frac{5}{6}x$.

894. **Pomakni hiperbolu** $H \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$ **paralelno samoj sebi tako, da joj desno tjeme dođe u koord. ishodište.**
Vršna jednadžba! $H \equiv y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$; $H \equiv y^2 = \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}x^2$.

895. **Nađi asimptote hiperbole** $H \equiv x^2 - y^2 = 16$.
Jednadžbu podijeli s 16, da dobiješ jednadžbu u obliku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a = b = 4$, $y = \pm x$.

896. **Točkom** $M_0(12, 3)$ **unutar hiperbole** $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$ **povuci onu tetivu, koju točka** M_0 **raspolavlja.**
Riješi jednadžbu pravca kroz točku M_0 i jednadžbu hiperbole. Dobit ćeš krajnje točke tetive i primijeni formule za koordinate raspolovišta (koje su ovdje poznate), a zatim načini jednadžbu pravca kroz 2 točke. $T \equiv 9x - 4y - 96 = 0$.

897. **Kroz središte hiperbole** $H \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$ **ima se položiti pravac, koji siječe obje grane hiperbole tako, da je dužina između sjecišta** $d = 10$. **Koji su to pravci i gdje sijeku hiperbolu ?**
Riješi jednadžbe hiperbole i pravca $y = ax$. Jer je $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2$ slijedi $a = \pm\frac{4}{3\sqrt{29}}$. Pravci jesu: $p_1 \equiv y = \frac{4}{3\sqrt{29}}x$, $p_2 \equiv y = -\frac{4}{3\sqrt{29}}x$. Sjecišta prvoga pravca jesu: $M_1\left(3\sqrt{\frac{29}{13}}, \frac{8}{\sqrt{13}}\right)$, $M_2\left(-3\sqrt{\frac{29}{13}}, -\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$; sjecišta drugoga pravca jesu $M_3\left(3\sqrt{\frac{29}{13}}, -\frac{8}{\sqrt{13}}\right)$, $M_4\left(-3\sqrt{\frac{29}{13}}, \frac{8}{\sqrt{13}}\right)$.

898. **Hiperbola** $H \equiv b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ **ima tangentu** $8\sqrt{7}x - 21y - 18\sqrt{7} = 0$ **i asimptote** $y = \pm\frac{2}{3}x$; **kolike su joj poluosi ?**

Jednadžbu tangente pomnoži s λ (jer je nastala možda skraćivanjem!) i isporedi je s $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$. Dobit ćeš $8\sqrt{7}\lambda = b^2x_0$ (1), $21\lambda = a^2y_0$ (2), $18\sqrt{7}\lambda = a^2b^2$ (3), $\frac{2}{3} = \frac{b}{a}$ (4). Jer $x_0 y_0$ zadovoljavaju jednadžbu tangente hiperbole, uvrsti ove relacije, pa ćeš dobiti (skrativši s λ): $8\sqrt{7}x_0 - 21y_0 = 18\sqrt{7}$ (5). Odatle: $x_0 = 4$, $y_0 = \frac{2}{3}\sqrt{7}$, $\lambda = \frac{2}{7}\sqrt{7}$; $a = 3$, $b = 2$. Dakle $H \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$.

899. **Nađi ploštinu trokuta, što ga zatvara tangenta hiperbole** $H \equiv x^2 - 4y^2 = 4$ **u točki** $M_0(2\sqrt{5}, 2)$ **s asimptotama.**
Jedan je vrh trokuta u koordinatnom ishodištu, a druge ćeš vrhove dobiti tražeći presjek tangente $T \equiv \sqrt{5}x - 4y - 2 = 0$ s asimptotama $A_{1,2} \equiv y = \pm\frac{x}{2}$. Za ploštinu primijeni formulu za $2P$! $P = 2$.

900. **Nađi dotačišta tangenata na hiperbolu** $H \equiv x^2 - y^2 = 144$, **koje s X-osi zatvaraju kut** $\alpha = 60^0$.
Iz $T \equiv 12x_0x - 12y_0y = 144$ slijedi $\frac{x_0}{y_0} = \sqrt{3}$ ili $y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{3}}$. To uvrsti u jednadžbu hiperbole! $x_0 = \pm 6\sqrt{6}$, $y_0 = \pm 6\sqrt{2}$.

901. **Tangenta na hiperboli poluosi** $a = 6{\cdot}5$, $b = 6$ **zatvara s pozitiv. X-osi kut** $\alpha = 45^0$. **Odredi koordinate dotačišta tangente.**
$T \equiv 36x_0x - 42{\cdot}25y_0y = 36.42{\cdot}25$. Odatle koeficijenat smjera $\frac{36\,x_0}{42\cdot25\,y_0} = 1$. Ovo uvrsti u jednadžbu $36x_0^2 - 42{\cdot}25y_0^2 = 36.42{\cdot}25$. $M_1(16{\cdot}9,\ 14{\cdot}4)$, $M_2(-16{\cdot}9, -14{\cdot}4)$. Moguće su dakle dvije tangente.

902. **Nađi jednadžbe tangenata povučenih iz točke** $P_0(0,6)$ **na hiperbolu** $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$ **i izračunaj ploštinu** p **trokuta, što ga zatvaraju te tangente s polarom, točke** P_0.
Riješi jednadžbe polare i hiperbole, da dobiješ dotačišta. Primijeni zatim jednadžbu pravca kroz 2

točke (ili koordinate dotačišta uvrsti u jednadžbu tangente $9x_1x-16y_1y=144$.)
$T_{1,2} \equiv 3\sqrt{5}\,x \pm 4y \mp 24 = 0$; $p = -15\sqrt{5}$.

903. **Nađi geometrijsko mjesto točaka $P(\xi,\eta)$, kojima je produkt udaljenosti od pravaca $p_1 \equiv \sqrt{3}x - y = 0$, $p_2 \equiv \sqrt{3}x + y = 0$ konstantna veličina k.**
$\frac{\sqrt{3}\xi-\eta}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\xi+\eta}{-2} = k$. Zamijenivši ξ i η s x i y dobit ćeš $y^2 - 3x^2 = 4k$, t. j. hiperbolu kao traženo geom. mjesto.

904. **Nađi geometrijsko mjesto točaka $P(\xi,\eta)$, kojima je produkt udaljenosti od koord. osi konstantan broj k, a točka $P_1(2,3)$ pripada među točke P.**
$\xi \cdot \eta = k$; $2 \cdot 3 = k$ ili $k = 6$. Zamijenivši ξ i η s x i y dobit ćeš istrostranu hiperbolu $xy = 6$.

905. **Nađi geometrijsko mjesto točaka $P(\xi,\eta)$, kojima je produkt udaljenosti od pravaca $p_1 \equiv y - x = 0$, $p_2 \equiv x + y = 0$ konstantna veličina k.**
Primijenivši formulu za udaljenost točke od pravca dobit ćeš $\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\xi+\eta}{-\sqrt{3}} = k$ ili ako se ξ i η zamijeni s x i y: $x^2 - y^2 = -2k$ ili $y^2 - x^2 = k'$ t. j. traženo je geom. mjesto istostrana hiperbola.

906. **Nađi geometrijsko mjesto točaka $P(\xi,\eta)$, kojima je produkt udaljenosti od pravaca $p_1 \equiv y = x + 2$, $p_2 \equiv -x + 2$ konstantan broj $k = 10$.**
$\frac{-\xi+\eta-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\xi+\eta-2}{-\sqrt{2}} = 10$ ili $(\eta-2)^2 - \xi^2 = -20$.
Zamijenivši ξ i η s x i y dobit ćeš $x^2 - (y-2)^2 = 20$ t. j. traženo je geom. mjesto istostrana hiperbola sa središtem $V(0,2)$.

907. **Prikaži hiperbolu $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$ u polarnim koordinatama.**
Nađi p i ε te uvrsti u $\varrho = \frac{p}{\varepsilon 1 - \cos\varphi}$, a onda uredi razlomak tako (pomnoži s 4,) da ne bude dvostrukoga razlomka. $\varrho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

908. **Što predočuje izraz $\varrho = \frac{9}{5 - \sqrt{34}\cos\varphi}$ u pravokutnim koordinatama?**
Brojnik i nazivnik podijeli s 5. Ovdje je $\varepsilon = \frac{\sqrt{34}}{5} > 1$ dakle: hiperbola. Jednadžbe $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{34}}{5}$, $p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}$ daju sa $e^2 = a^2 + b^2$ poluosi $a = 5$, $b = 3$. $H \equiv 9x^2 - 25y^2 = 225$.

§ 29. PARABOLA.

909. **Koja je jednadžba parabole, koja ima tjeme u $T(0,-2)$, a prolazi točkom $M(2,0)$, ako je os parabole paralelna s Y-osi?**
Takva parabola ima jednadžbu $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, gdje x_0 i y_0 znače koordinate vrha. $P \equiv y = \frac{x^2}{2} - 2$.

910. **Nađi ploštinu p trokuta, što ga s osi apscisa zatvaraju tangenta i normala u točki $M_0(2,3)$ parabole $P \equiv y^2 = \frac{9}{2}x$.**
Primijeni formule za tangentu i normalu, kad je poznato dotačište. $T \equiv 3x - 4y + 6 = 0$, $N \equiv 4x + 3y - 17 = 0$, $p = \frac{75}{8}$.

911. **Koje zajedničke točke ima parabola $P \equiv y^2 = 24x$ s pravcem $y = 3x + 2$?**
Riješi jednadžbe po x i y. — $M_0\left(\frac{2}{3}, 4\right)$. Pravac je tangenta.

912. **Nađi jednadžbu parabole, kojoj je os paralelna s X-osi, parametar joj je $2p = 4$, a njezino tjeme leži u točki $T(3,4)$. Koje koordinate ima fokus?**
Pomakni koord. ishodište u točku T i odredi relacije između novih i prvobitnih koordinata. $P \equiv (y-4)^2 = 4(x-3)$, $F(4,4)$.

913. **Koja je jednadžba parabole, koja ima tjeme u $T(5,4)$, a prolazi točkom $M(2,0)$, ako je os parabole paralelna s Y-osi?**

$y = a(x-x_0) + y_0$; $P \equiv y = \frac{4}{9}(x-5)^2 - 4.$

914. **Parabolu $y^2 = 4x$ siječe pravac $x = 9$; kolika je ploština dobivenoga segmenta parabole?**
Nađi apscisu sjecišta. To je gornja granica integrala.
$P = 4\int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 72.$

915. **Nađi vršnu jednadžbu parabole, koja ima X-os kao os simetrije, a prolazi točkom $M_0(4,6)$.**
U $y^2 = 2px$ uvrsti koordinate točke M_0 ! $P \equiv y^2 \equiv 9x.$

916. **U dvije točke parabole, kojoj je X-os os simetrije, podignute su normale, koje zatvaraju kut φ tako, da je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$. Koja je to parabola i koje su jednadžbe tih normala, ako je suma apscisa točaka, u kojima su normale podignute, jednaka 5, a koeficijenat smjera jedne normale jest $a_2 = -2$?**
Jednadžbe $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$ zbrojene daju s obzirom na $x_1 + x_2 = 5$ relaciju $y_1^2 + y_2^2 = 10\,p$. Iz $N_2 \equiv y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x_2 + x)$ i iz $a_2 = -2$ slijedi $y_2 = 2\,p$. Iz formule za $\operatorname{tg}\varphi$ slijedi, jer je $a_1 = -\frac{y_1}{p}$, $y_1 = 5\,p$. Jednadžba $y_1^2 + y_2^2 = 10p$ daje dakle: $p = \frac{10}{29}$; $y_1 = \frac{50}{29}$, $y_2 = \frac{20}{29}$, $x_1 = \frac{125}{29}$, $x_2 = \frac{20}{29}$; $P \equiv y^2 = \frac{20}{29}x$; $N_1 \equiv 145x + 29y - 775 = 0$, $N_2 \equiv 58x + 29y - 60 = 0.$

917. **Nađi jednadžbu parabole, kojoj je Y-os os simetrije, a prolazi točkama $M_1(0,-1)$ $M_2(2,0)$, $M_3(-2,0)$. Kolika je ploha, koju omeđuje luk te parabole, X-os i ordinate na mjestima $x = 3$, $x = 5$?**
U $y = ax^2 + bx + c$ uvrsti koordinate točaka. Dobit ćeš 3 jednadžbe, koje određuju koeficijente a, b, c. —
$P \equiv y = \frac{1}{4}x^2 - 1$; $p = \int_3^5 \left(\frac{x^2}{4} - 1\right) dx = \frac{25}{6}.$

918. **Nađi jednadžbu normale na parabolu $P \equiv y^2 = 50x$ u točki $M_0(2, 10)$.**
$N \equiv y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$; $N \equiv 2x + 5y - 4 = 0.$

919. **Pravac, koji zatvara s pozit. X-osi kut 60^0, prolazi točkom M_1 parabole i njezinim žarištem. Koja je to parabola, ako točka M_1 ima apscisu $x_1 = 4$, tjeme parabole leži u koordinatnom ishodištu, a X-os joj je os simetrije?**
$P \equiv y^2 = 2\,px$. — Načini jednadžbu pravca kroz žarište i u nju uvrsti $x = 4$; zatim primijeni jednadžbu $y^2 = 2px$. Žarište ima koordinate $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Iz $y_1 = \sqrt{3}\left(4 - \frac{p}{2}\right)$ i $y_1^2 = 8\,p$ slijedi: $3p^2 - 80p + 192 = 0$. Odatle : $p_1 = 24$, $p_2 = \frac{8}{3}$. Dvije su parabole moguće : $y^2 = 48x$, $y^2 = \frac{16}{13}x$.

920. **Na parabolu $P \equiv y^2 = 8x$ povuci tangentu, koja s pozit. X-osi zatvara kut $\alpha = 60^0$ i odredi točku, u kojoj ta tangenta siječe X-os.**
$T \equiv y_0 y = 4(x_0 + x)$; $\frac{4}{y_0} = \sqrt{3}$ ili $y_0 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$; x_0 nađi iz P. Dobit ćeš $x_0 = \frac{2}{3}$; $T \equiv 3x - \sqrt{3}\,y + 2 = 0.$
$M\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

921. **Iz koje se točke mogu povući na parabolu $P \equiv y^2 - 10x = 0$ tangente, od kojih jedna zatvara s pozit. X-osi kut $\alpha_1 = 45^0$, a druga kut $\alpha_2 = 135^0$? Koje su to tangente ?**
Dotačišta neka su M_1 i M_2. $T_1 \equiv y_1 y = 5\,(x_1 + x)$, $T_2 \equiv y_2 y = 5(x_2 + x)$. Odavle izlazi iz uvjeta za koeficijente smjera: $\frac{5}{y_1} = 1$, $\frac{5}{y_2} = -1$ ili $y_1 = 5$, $y_2 = -5$. Iz jednadžbe parabole izlazi : $x_{1,2} = \frac{5}{2}$. Dakle $T_1 \equiv 2x - 2y + 5 = 0$, $T_2 \equiv 2x + 2y + 5 = 0$.

922. **Nađi tangente parabole $P \equiv y^2 - 4x = 0$ povučene iz točke $M_0(-1, 3)$.**
Riješi jednadžbu parabole i polare, da dobiješ dotačišta tangenata, a onda na tangente primijeni jednadžbu pravca kroz dvije točke. — Zadatak možeš riješiti i pomoću uvjetne jednadžbe $pB^2 = 2AC$, gdje su A i B koeficijenti ispred x i y, a C apsolutni član u jednadžbi pravca kroz jednu točku, svedenoj na općeni oblik. $T_1 \equiv 3x + y = 0$, $T_2 \equiv y = 3$.

923. Iz točke $M_0(-3, -4)$ povuci tangente na parabolu $y^2 = 18x$.
Riješi pomoću polare ili pomoću uvjetne jednadžbe $pB^2 = 2AC$ (Vidi zadatak 922.) $T \equiv y + 4 = a(x+3)$ ili $-ax + y + 4 - 3a = 0$. Dakle $A = -a$, $B = 1$, $C = 4 - 3a$. Uvjetna jednadžba daje $6a^2 - 8a - 9 = 0$. $T_1 \equiv (4 + \sqrt{70})x - 6y - 12 + 3\sqrt{70} = 0$, $T_2 \equiv (4 - \sqrt{70})x - 6y - 12 - 3\sqrt{70} = 0$.

924. Nađi pomoću polare jednadžbe tangenata na parabolu $y^2 = 20x$ povučenih iz točke $P_0(-3, 0)$ i odredi tupi kut, što ga zatvaraju te tangente.
$\Pi \equiv yy_0 = p(x_0 + x)$; $\Pi \equiv x = 3$. To uvrsti u jednadžbu parabole. $M_1(3, 2\sqrt{15})$, $M_2(3, -2\sqrt{15})$.
$T_{1,2} \equiv 5x \mp \sqrt{15}y + 15 = 0$; $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{15}$, $\varphi = 104^\circ 28' 38''$

925. Nađi na paraboli $P \equiv y^2 = 16x$ točku, u kojoj tangenta i normala zatvaraju s X-osi istokračan trokut. (baza trokuta leži u X-osi!)
Ako tangenta zatvara s pozit. X-osi kut α, onda normala zatvara kut $180 - \alpha$. Prema tome je $A_1 = -A_2$. Dotačište tangente označi s x_0, y_0 i načini jednadžbu tangente i normale, pa primijeni $A_1 = -A_2$.
$M_0(4, \pm 8)$.

926. Prikaži parabolu $\varrho = \frac{9}{1 - \cos\varphi}$ u Kartezijevim koordinatama. $p = 9$; $P \equiv y^2 = 18x$.

927. Prikaži parabolu $\varrho = -\frac{10}{1 - \cos\varphi}$ u Kartezijevim koordinatama. $p = -10$; $P \equiv y^2 = -20x$

928. Prikaži parabolu $P \equiv y^2 = 16x$ u polarnim koordinatama. Pol neka je u parabolinu žarištu.
Svedi na oblik $\varrho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$; $P \equiv \varrho = \frac{8}{1 - \cos\varphi}$.

§ 30. KOMBINIRANI ZADACI.

Krug i elipsa.

929. Kroz gornje i desno tjeme elipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ položi krug tako, da mu središte leži na pravcu $y = x$.
Tjemena su $T_1(4, 0)$; $T_2(0, 3)$. Jednadžba kruga jest $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Uvrstivši koordinate tih točaka ovamo dobit ćeš: $16 + 4a + c = 0$, $9 + 3b + c = 0$. Odatle: $7 + 4a - 2b = 0$, $p = q$ ili $a = b$; $a = b = -7$, $c = 12$. $K \equiv x^2 + y^2 - 7x - 7y + 12 = 0$.

930. Krivulje se $9x^2 + 25y^2 = 225$ i $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ sijeku u 2 točke. Ako u tim točkama podigneš tangente na obadvije krivulje, dobit ćeš četverokut. Nađi ploštinu četverokuta.
Sjecišta su $M_1\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$; $M_2\left(\frac{15}{4}, -\frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$. Druge ćeš vrhove A i B četverokuta dobiti, kad nađeš sjecišta tangenata. $T_1 \equiv -x + 3\sqrt{7}y = 12$; $T_2 \equiv -x - 3\sqrt{7}y = 12$; $T_3 \equiv 9x + 5\sqrt{7}y = 60$; $T_4 \equiv 9x - 5\sqrt{7}y = 60$; $A(-12, 0)$; $B\left(\frac{20}{3}, 0\right)$. Da nađeš ploštinu po formuli $2P$, rastavi četverokut u 2 trokuta. $P = 14\sqrt{7}$.

931. Krug $y^2 = 8x - x^2$ i elipsa $y^2 = \frac{8}{5}x - \frac{4}{25}x^2$ sijeku se u tri točke, koje su vrhovi trokuta. Koliki su kutovi trokuta?
Riješi zadane jednadžbe. $M_1(0, 0)$; $M_2\left(\frac{160}{21}, \frac{16}{21}\sqrt{5}\right)$; $M_3\left(\frac{160}{21}, -\frac{16}{21}\sqrt{5}\right)$. Kutove nađi pomoću formule $\operatorname{tg}\varphi$. $\alpha = 25^\circ 12' 33''$, $\beta = \gamma = 77^\circ 23' 44''$.

932. Zadan je krug $K \equiv x^2 + y^2 = 9$ i elipsa $E \equiv 4x^2 + 16y^2 = 64$. Nađi zajedničke tangente tih krivulja i kutove, kojih kraci dotiču lukove zadanih krivulja, što ih te tangente zatvaraju.
Zajedničke tangente neka se sijeku u $M_0(x_0, y_0)$. Te tangente imadu oblik $T \equiv y - y_0 = a(x - x_0)$; $A = a$,

$B = 1$, $C = y_0 - ax_0$. Uvjetne su jednadžbe: $9(A^2 + B^2) = C^2$ i $16A^2 + 4B^2 = C^2$. One daju suptrakcijom $a = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}$. Tangenta na krug ima oblik $\xi x + \eta y = 9$. Odavle izražen koeficijenat smjera daje: $-\frac{\xi}{\eta} = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}$. Odavle i iz $\xi^2 + \eta^2 = 9$ slijedi: $M_1\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$; $T_{1,4} \equiv \sqrt{5}x + \sqrt{7}y \mp 6\sqrt{3} = 0$. $T_{2,3} \equiv \sqrt{5}x - \sqrt{7}y \pm 6\sqrt{3} = 0$; $\operatorname{tg} \varphi_{1,3} = \operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \sqrt{35}$. $\varphi_{1,2} = 80^0 24' 22''$.

933. **Zadan je krug $K \equiv x^2 + y^2 = 25$ i elipsa $E \equiv 9x^2 + 36y^2 = 324$. Nađi obje zajedničke tangente, njihovo sjecište i kut, što ga zatvaraju.**

Riješi pomoću uvjetnih jednadžbi: $r^2(A^2 + B^2) = C^2$ i $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$, koje ovdje imaju oblik: $25(a^2 + 1) = (y_0 - ax_0)^2$, $36a^2 + 9 = (y_0 - ax_0)^2$, gdje su x_0, y_0 koordinate sjecišta tangenata, a a je koeficijenat tangente. Odatle $a = \pm\frac{4}{\sqrt{11}}$. Ako ξ i η znače dotačište tangenata na krugu, slijedi iz $\xi x + \eta y = 25$, da je $\xi = \mp\eta\frac{4}{\sqrt{11}}$. Dotačišta tangenata jesu: $M_1\left(\frac{20}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}\right)$, $M_2\left(\frac{20}{3\sqrt{3}}, -\frac{5}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}\right)$; $T_{1,2} \equiv 4x \pm \sqrt{11}\,y - 15\sqrt{3} = 0$; $\varphi = 100^0 40' 28''$; $S\left(\frac{15}{4}\sqrt{3}, 0\right)$.

934. **Nađi jednadžbu kruga, koji prolazi točkom $P_0(0, -4)$ i točkama, u kojima siječe polara elipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 36$ s obzirom na točku P_0 tu elipsu.**

Nađi polaru i njezina sjecišta s elipsom. $\Pi \equiv y + 1 = 0$, $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -1\right)$, $M_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -1\right)$. Iza toga nađi jednadžbu kruga, koji prolazi kroz 3 točke. Krug neka ima jednadžbu $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Uvrstivši ovamo koordinate točaka, dobit ćeš 3 jednadžbe, koje određuju koeficijente a, b, c. $a = 0$, $b = \frac{11}{4}$, $c = -5$; $K \equiv 4x^2 + 4y^2 + 11y - 20 = 0$.

935. **Zadane su jednadžbe elipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ i kruga $K \equiv (x - 5)^2 + y^2 = 16$. Nađi jednadžbe onih dijametara elipse, koji su, kad se produže, tangente zadanoga kruga. Kolike su dužine tih dijametara?**

Dijametri moraju imati oblik $y = ax$. Da odrediš a, traži udaljenost središta kruga od pravca $y = ax$, t. j. stavi $\frac{-ax_0 + y_0}{\pm\sqrt{a^2 + 1}} = r$. Ovdje je $x_0 = p = 5$, $y_0 = q = 0$. Dakle $-ap = r\sqrt{a^2 + 1}$; odatle: $a = \pm\frac{4}{3}$. Dijametri imaju prema tome jednadžbu $y = \pm\frac{4}{3}x$. Da nađeš dužinu d dijametra, riješi jednadžbu $y = \pm\frac{4}{3}x$ i jednadžbu elipse. $d = \frac{120}{\sqrt{337}} \doteq 6{\cdot}54$.

936. **Nađi jednažbu kruga, koji ima središte na X-osi, a prolazi tjemenima na velikoj osi elipse $E \equiv 9x^2 + 25y^2 - 90x = 0$. Kako se odnose ordinata toga kruga i te elipse na mjestima $x = 2$ i $x = 4$?**

Jednadžbu E upotpuni na oblik $b^2(x - p)^2 + a^2(y - q)^2 = a^2b^2$. Dobit ćeš $E \equiv 9(x - 5)^2 + 25y^2 = 225$. Središte elipse ima dakle koordinate $C(5,0)$, a tjemena $O(0,0)$, $A(10,0)$. Središte kruga mora imati središte u C, pa mu je jednadžba $K \equiv (x - 5)^2 + y^2 = 25$. Ordinata točke kruga na mjestu $x = 2$ jest (supstitucijom $x = 2$ u jednadžbu kruga) $y_k = \pm 4$, a ordinata točke na elipsi jest $y_e = \pm\frac{12}{5}$; $y_k : y_e = 5 : 3 = a : b$.

937. **Nađi jednadžbe zajedničkih tangenata kruga $K \equiv x^2 + y^2 = 16$ i elipse $E \equiv 9x^2 + 25y^2 = 225$ i odredi sjecišta tih tangenata.**

Ako ima tangenta oblik $Ax + By + C = 0$, onda je uvjet za krug: $r^2(A^2 + B^2) = C^2$, a za elipsu: $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$. Odatle: $9A^2 = 7B^2$, $C = \pm\frac{16A}{\sqrt{7}}$. Uvršteno u $Ax + By + C = 0$ daje: $\sqrt{7}x + 3y \pm 16 = 0$.

$T_{1,2} \equiv \sqrt{7}x + 3y \pm 16 = 0$, $T_{3,4} \equiv \sqrt{7}x - 3y \pm 16 = 0$;
$A\left(\frac{16}{\sqrt{7}}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{16}{3}\right)$, $C\left(-\frac{16}{\sqrt{3}}, 0\right)$ $D\left(0, -\frac{16}{3}\right)$.

Krug i hiperbola.

938. Zadana je hiperbola $H \equiv 4x^2 - 9y^2 = 36$. Nađi polumjer kruga, koji leži u desnoj grani te hiperbole, prolazi kroz njezino desno tjeme, a asimptote hiperbole su mu tangente.
Nađi tangens priklonoga kuta jedne asimptote i izračunaj r trigonometrijskim putem. $A_s = \pm\frac{2}{3}x$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$.
Iz pravokutnoga trokuta (kad spustiš polumjer na tangentu) slijedi: $r = (a + r) \cdot \sin\alpha$ ili $r = a \cdot \frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$.
Jer je $\sin\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ slijedi: $r = \frac{2}{3}(\sqrt{13} + 2) \doteq 4$.

939. Nađi sjecište krivulja $H \equiv xy = \frac{9}{2}$ i $K \equiv x^2 + y^2 = 16$.
Riješi jednadžbe! t. j. jednadžbe $x^2 + y^2 = 16$, $2xy = 9$ jedamput zbroji, a drugi put odbi. Dobit ćeš: $x = \pm\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{7})$, $y = \pm\frac{1}{2}(5 \mp \sqrt{7})$. Sjecišta su $A\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{5+\sqrt{7}}{2}, -\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$, $D\left(-\frac{5-\sqrt{7}}{2}, -\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$.

940. Krug ima ploštinu $P = 100\pi$, a središte mu je zajedničko s hiperbolom $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$. U kojim se točkama sijeku te krivulje?
Iz $P = 100\pi$ slijedi $r^2 = 100$. $K \equiv x^2 + y^2 = 100$. Riješi jednadžbe, da dobiješ sjecišta. $A\left(\frac{4}{5}\sqrt{109}, \frac{6}{5}\sqrt{21}\right)$, $B\left(-\frac{4}{5}\sqrt{109}, \frac{6}{5}\sqrt{21}\right)$, $C\left(-\frac{4}{5}\sqrt{109}, -\frac{6}{5}\sqrt{21}\right)$, $D\left(\frac{4}{5}\sqrt{109}, -\frac{6}{5}\sqrt{21}\right)$.

941. U kojim se točkama sijeku krivulje $K \equiv y^2 = 6 \cdot 8x - x^2$ i $H \equiv x^2 - y^2 = 16$ i pod kojim kutom?
Riješi jednadžbe! $A(5,3)$, $B(5, -3)$. U sjecištu podigni tangente na krug i hiperbolu, pa odredi koeficijente. $\text{tg}\,\varphi = \frac{3}{5}$; $\varphi = 36\ 52'11''$.

942. Nađi sjecišta krivulja $K \equiv x^2 + y^2 = 12$ i $H \equiv xy = 4$.
Riješi jednadžbe: $x^2 + y^2 = 12$, $2xy = 8$.
$M_1(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1)$, $M_2(\sqrt{5}+1, -\sqrt{5}+1)$, $M_3(-\sqrt{5}-1, \sqrt{5}-1)$; $M_4(-\sqrt{5}-1, -\sqrt{5}+1)$.

943. Isto za $K \equiv x^2 + y^2 = 36$, $H \equiv xy = 16$.
Riješi jednadžbe po x i y. $M_1(\sqrt{17}+1, \sqrt{17}-1)$, $M_2(\sqrt{17}+1, -\sqrt{17}-1)$, $M_3(-\sqrt{17}-1, \sqrt{17}-1)$, $M_4(-\sqrt{17}-1, -\sqrt{17}+1)$.

944. Isto za $K \equiv x^2 + y^2 = 16$, $H = x^2 - y^2 = 9$.
Riješi jednadžbe! $M_1\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{5}{2}\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

945. Isto za $K \equiv x^2 + y^2 = 41$, $H \equiv x^2 - y^2 = 9$.
Riješi jednadžbe! $M_1(5,4)$, $M_2(5,-4)$, $M_3(-5,4)$, $M_4(-5,-4)$.

946. Isto za $K \equiv x^2 + y^2 = 100$, $H \equiv x^2 - y^2 = 28$.
Riješi jednadžbe! $M_1(8,6)$, $M_2(8,-6)$, $M_3(-8,6)$. $M_4(-8,-6)$.

947. Nađi zajedničke tangente na krivulje $H \equiv 9x^2 - 25y^2 - 224 = 0$, $K \equiv x^2 + (y-8)^2 - 16 = 0$.
Uvjeti su, ako se uzme tangenta u obliku $Ax + By + C = 0$, $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$, $r^2(A^2 + B^2) = C^2$?
$T_{1,2} \equiv 5x + 3y \pm 4\sqrt{34} = 0$.

Krug i parabola.

948. Koju jednadžbu ima parabola, kojoj je X-os os simetrije, prolazi koord. ishodištem, a siječe krug $K \equiv x^2 + y^2 = 16$ u točki, kojoj je apscisa $x_0 = 2$?
Uvrsti koordinate $(2, y_0)$ u $y^2 = 2px$ i u jednadžbu K. $P \equiv y^2 = 6x$.

949. Nađi ploštinu lika omeđenoga parabolom $P \equiv y = \frac{\sqrt{5}}{4}x^2$ i spojnicom sjecišta te parabole i kruga $K \equiv x^2 + y^2 = 9$.

Nađi sjecišta. Polovica lika jest $\frac{2}{3}x_0y_0$; $S(2,\sqrt{5})$. Cijeli lik ima ploštinu $p = 2 \cdot \frac{2}{3} 4\sqrt{5} = \frac{16}{3}\sqrt{5} = 11{\cdot}9.$

950. **Nađi ploštinu onoga segmenta parabole $P \equiv y^2 = 18x$, što leži između koord. ishodišta i spojnice točaka, u kojima tu parabolu siječe krug $K \equiv x^2 + y^2 = 144$.**
Apscisa sjecišta tih krivulja jest $x = 6$. Tražena je ploština $p = 2\int_0^6 \sqrt{18x}\,dx = 6\sqrt{x}\int_0^6 x^{1/2}dx = 48\sqrt{3}$.

951. **Pravac $p \equiv y = \sqrt{3}\,(x - 12)$ ima biti zajednička tangenta krugova, kojima su središta na X-osi, a dotiču se zadanoga pravca u točkama, u kojima taj pravac siječe parabolu $P \equiv y^2 = 48x$. Koji su to krugovi?**
Sjecišta pravca i parabole jesu: $A(36, 24\sqrt{3})$, $B(4, -8\sqrt{3})$. Tangenta kroz A ima jednadžbu $y = -\frac{36-p}{24\sqrt{3}}x + \frac{p(36-p)+r^2}{24\sqrt{3}}$, a jer je i $y = \sqrt{3}\,(x-12)$ tangenta kroz tu točku, slijedi, da su im koeficijenti smjera i odresci na Y-osi jednaki t. j. $\frac{36-p}{24\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$; $\frac{p(36-p)+r^2}{24\sqrt{3}} = -12.\sqrt{3}$. Dakle $K_1 \equiv (x-108)^2 + y^2 = 6912$. Analogno $K_2 \equiv (x+20)^2 + y^2 = 768$.

952. **Nađi zajedničke tangente parabole $P \equiv y^2 = 15\,x$ i kruga $K \equiv x^2 + y^2 = 64$.**
Neka dotačište na krugu ima koordinate x_0, y_0. Tangenta je tada $T \equiv x_0x + y_0y = 64$. Odatle $A = x_0$, $B = y_0$, $C = -64$. Iz $x_0^2 + y_0^2 = 64$ slijedi: $A^2 + B^2 = 64$. Iz uvjetne jednadžbe za parabolu $pB^2 = 2AC$ slijedi: $B^2 = -\frac{4.64}{15}A$. Ova s $A^2 + B^2 = 64$ daje $A = -\frac{24}{5}$; $B = \pm\frac{32}{5}$. Dakle: $T_{1,2} \equiv 3x \mp 4y + 40 = 0$.

953. **Nađi zajedničke tangente na krug $K \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0$ i parabolu $P \equiv y^2 = 4x$ i odredi njihovo sjecište.**
Uvjetne su jednadžbe: $r^2(A^2 + B^2) = C^2$, $pB^2 = 2AC$ ako tangenta ima oblik $Ax + By + C = 0$. Postupak,

kao u prijašnjem zadatku! Ako su koordinate dotačišta tangente na paraboli x_0, y_0, onda je jednadžba tangente: $-2x + y_0y - 2x_0 = 0$. Odatle $A = -2$, $B = y_0$, $C = -2x_0$ Uvjetne su jednadžbe: $16(A^2 + B^2) = C^2$, $B^2 = AC$. S obzirom na $A = -2$ daju te jednadžbe relaciju: $16(4 - 2C) = C^2$ ili $C = -16 \pm 8\sqrt{5}$; $B^2 = 32 \mp 16\sqrt{5}$. Jer B ima biti realno, može biti samo $B = \pm 4\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, a to je onda, kad je $C = -8(2 + \sqrt{5})$. Dakle: $T_{1,2} \equiv x \mp 2\sqrt{2+\sqrt{5}}.\,y + 8 + 4\sqrt{5} = 0$; $S(-8-4\sqrt{5},\ 0)$.

Elipsa i hiperbola.

954. **Nađi koordinate točaka, u kojima sijeku asimptote hiperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$ elipsu $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$.**
Riješi jednadžbe asimptota i elipse! $A_s \equiv y = \pm\frac{3}{4}x$, $M_1\,(2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$, $M_2(-2\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2})$, $M_3(2\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2})$; $M_4(-2\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2})$.

955 **Nađi sjecišta krivulja $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 144$ i $H \equiv x^2 - y^2 = 16$.**
Riješi jednadžbe! $M_{1,2}\left(\frac{12}{13}\sqrt{2}, \pm\frac{4}{13}\sqrt{65}\right)$, $M_{3,4}\left(-\frac{12}{13}\sqrt{2}, \pm\frac{4}{13}\sqrt{65}\right)$.

956. **Pod kojim se kutom sijeku krivulje $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 144$, $H \equiv x^2 - y^2 = 16$?**
Traži manji kut, što ga zatvaraju međusobno tangente u sjecištima tih krivulja. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{13.65.\sqrt{2}}{3.57.\sqrt{65}}$. $\varphi = 40°55'9''$.

957. **Nađi zajedničke tangente krivulja $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$, $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$.**
Uvjeti su $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$, $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$. Odatle $4A = \pm C$, $Bb = 0$, ako tangenta ima oblik $Ax + By + C = 0$. Jer te krivulje nemaju $b = 0$, nego $b = 3$, slijedi $B = 0$. Neka su x_0, y_0 koordinate dotačišta tan-

gente na hiperbolu. Ta tangenta ima jednadžbu: $9x_0x - 16y_0y - 144 = 0$. Odatle: $C = -144$. Iz uvjeta slijedi: $4A = \mp 144$ ili $A = \mp 36$. $T_1 \equiv x + 4 = 0$, $T_2 \equiv x - 4 = 0$.

958. **Nađi tangente na elipsu $E \equiv 16x^2 + 25y^2 = 400$ paralelne s onom asimptotom hiperbole $H \equiv x^2 - y^2 = 25$, koja prolazi prvim kvadrantom.**

$A_s \equiv y = x$; $T \equiv 16x_0x + 25y_0y = 400$. Odatle: $-\frac{16x^0}{25y_0} = 1$. Ova jednadžba i $16x_0^2 + 25y_0^2 = 400$ daju $x_0 = \mp \frac{25}{\sqrt{41}}$, $y_0 = \pm \frac{16}{\sqrt{41}}$; $T_{1,2} \equiv \pm \frac{x}{\sqrt{41}} \mp \frac{y}{41} + 1 = 0$.

Elipsa i parabola.

959. **Nađi jednadžbu parabole, koja ima žarište u desnom žarištu elipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$.**

$e = p$; $e = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$; $P \equiv y^2 = 2\sqrt{7}\left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

960. **Nađi jednadžbu parabole, kojoj je tjeme u koord. ishodištu, a žarište joj leži u lijevom žarištu elipse $E \equiv y^2 = \frac{9}{2}x - \frac{9}{16}x^2$, ako os parabole leži u X-osi. Nađi također ploštinu trokuta, kojemu je prvi vrh u zajedničkom tjemenu tih krivulja, drugi pak i treći vrh imaju apscise $x_0 = 2$, dok jedan leži na elipsi, a drugi na paraboli.**

$a = 4$, $b = 3$; $p = e = \sqrt{7}$; $P \equiv y^2 = 2\sqrt{7}\left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$,

$A(0,0)$, $B\left(2, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $C\left(2 \pm \sqrt{4\sqrt{7} - 7}\right)$.

$pl = \sqrt{4\sqrt{7} - 7} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

961. **Elipsu $E \equiv 4x^2 + 8y^2 = 32$ siječe neka parabola $P \equiv y^2 = 2px$. Tangente na parabolu povučene sjecištima tih krivulja prolaze kroz lijevo žarište elipse. Koja je to parabola, koje su to tangente i koji kut zatvaraju?**

U tangentu $T \equiv y_0y = p(x + x_0)$ uvrsti $F(-2, 0)$. Slijedi $x_0 = 2$. Iz $y_0^2 = 2px_0$ izlazi dakle: $y_0^2 = 4p$. Iz jednadžbe $4x_0^2 + 8y_0^2 = 32$ slijedi napokon $p = \frac{1}{2}$. Prema tome $P \equiv y^2 = x$. Sjecišta su $M_{1,2}(2, \pm\sqrt{2})$. $T_{1,2} \equiv x \mp 2\sqrt{2}\,y + 2 = 0$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{7}\sqrt{2}$, $\varphi = 38^0 56' 33''$.

962. **Nađi zajedničke tangente na krivuljama $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$ i $P = y^2 = 6x$.**

Uvjeti su: $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$, $pB^2 = 2AC$, ako tangenta ima oblik $Ax + By + C = 0$. Neka su x_0, y_0 koordinate dotačišta tangente na elipsi. Ta tangenta ima jednadžbu: $9x_0x + 16y_0y - 144 = 0$.

Odatle $C = -144$. Iz $16A^2 + 9B^2 + 144 = 0$ i iz $3B^2 = -2.144A$ slijedi $A = 9(3 - \sqrt{10})$, $B = \pm 12\sqrt{6(\sqrt{10} - 3)}$,

$T_{1,2} \equiv 3(3 - \sqrt{10})x \pm 4\sqrt{6(\sqrt{10} - 3)}\,y - 48 = 0$.

Hiperbola i parabola.

963. **Kojoj su paraboli asimptote hiperbole $H \equiv 16x^2 - 25y^2 = 400$ tangente, ako se tjeme parabole podudara s desnim tjemenom hiperbole?**

$y^2 = 2p(x - 5)$. Ako su *a* i *b* koordinate tjemena parabole, kojoj je os paralelna s koord. X-osi, jednadžba parabole jest $(y - b)^2 = 2p(x - a)$, a tangente $T \equiv y - y_0 = \frac{p}{y_0 - b} \cdot (x - x_0)$. U ovom je zadatku $T \equiv y - y_0 = \frac{p}{y_0} \cdot (x - x_0)$. Odatle $\frac{p}{y} = \pm\frac{4}{5}$, jer su asimptote $y = \pm\frac{4}{5}x$. Iz $y_0 = \pm\frac{4}{5}x_0$, iz $y_0^2 = 2p(x_0 - 5)$ i iz $p = \pm\frac{4}{5}y_0$ slijedi: $x_0 = 10$, $y_0 = \pm 8$, $p = 6{\cdot}4$. $P \equiv y^2 = 12{\cdot}8(x - 5)$.

964. **Nađi jednadžbu parabole, kojoj je tjeme u desnom žarištu hiperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$, a parametar joj je triput veći od imaginarne osi te hiperbole.**

$e^2 = a^2 + b^2$, $e = 5$, $p = 9$. $P \equiv y^2 = 18(x - 5)$.

965. **U kojima se točkama sijeku hiperbola $H \equiv x^2 - y^2 = 16$ i parabola $P \equiv 30y = (5\sqrt{3} - 6)\,x^2 + (48 - 25.\sqrt{3}x)$ i koja im je zajednička sekanta?**

Riješi jednadžbe! $A(5,3)$, $B(8, 4\sqrt{3})$; $S \equiv (4\sqrt{3} - 3)\,x - 3y + 24 = 0$.

966. Gdje se sijeku $H \equiv 9x^2 - 16y^2 = 144$ i $P \equiv y^2 = 6x$? Riješi jednadžbe! $x_2 = -\frac{4}{3}$ ne zadovoljava, jer daje y_2 imaginarno. $A(12, 6\sqrt{2})$, $B(12, -6\sqrt{2})$.

PRIMJENA INFINITEZIMALNOGA RAČUNA.

§ 31. PRIMJENA DERIVACIJE NA GEOMETRIJU.

967. **Nađi tjeme parabole $y = 3x^2 - 2x + 1$ i jednadžbu tangente na mjestu $x = 2$.**
U tjemenu je minimum funkcije. Uvjet je za ekstremne vrijednosti funkcije $y' = 0$. Taj uvjet daje jednadžbu $6x - 2 = 0$, a odatle $x = \frac{1}{3}$. Da dobiješ ordinatu tjemena, uvrsti $x = \frac{1}{3}$ u zadanu jednadžbu. Dobit ćeš $y = \frac{2}{3}$. — Jednadžba tangente jest $T \equiv y - y_0 = y'(x - x_0)$; ovdje je $x_0 = 2$, $y_0 = 9$ (slijedi iz zadane jednadžbe). Na mjestu $x_0 = 2$ jest $y' = 6x_0 - 2 = 10$. $T \quad 10x - y - 11 = 0$.

968. **Metodom ekstremnih vrijednosti nađi tjeme parabole P $\quad y = -2(x - 2)^2 - 3$.**
Grana ove parabole okrenuta je dolje, pa tražiti ordinatu tjemena znači tražiti maksimum. $y' = 0$; odatle : $T\,(2, -3)$.

969. **Metodom ekstremnih vrijednosti nađi tjeme parabole P $\quad y = x^2 + 2$.**
$y' = 0$; odatle : $T\,(0, 2)$.

970. **Metodom ekstremnih vrijednosti nađi tjeme parabole $P \equiv y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4$.**
Grana parabole okrenuta je dolje. Traži se maksimum. Iz $y' = 0$ slijedi $T\,(-3, -4)$.

971. **Nađi tjeme parabole $P \equiv y = (x - 3)^2 - 2$ i jednadžbu sekante, koja prolazi tjemenom parabole, a s pozit. X-osi zatvara kut $\alpha = 45^0$. Gdje sekanta siječe tu parabolu ?**

Iz $y' = 0$ slijedi $T(3, -2)$. Sekanta jest: $S \equiv y = x - 5$. Sjecište jest $M_1(4, -1)$.

972. **Metodom ekstremnih vrijednosti nađi tjeme parabole** $P \equiv y = 2x^2 - 4x + 3$.
$y' = 0$. Odatle: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. $T(1, 1)$.

973. **Metodom ekstremnih vrijednosti nađi tjeme parabole** $P \equiv y = 3(x+2)^2 + 1$.
$y' = 0$; odatle $V(-2, 1)$.

974. **Nađi jednadžbu sekante, koja prolazi tjemenom parabole** $P \equiv y = 3(x+2)^2 + 1$, **a s pozit. X-osi zatvara kut** $\alpha = 45^0$. **Nađi također sjecište sekante i parabole.**
Iz $y' = 0$ slijedi $T(-2, 1)$. Sekanta $S \equiv x - y + 3 = 0$ siječe parabolu u točki $M_0\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

975. **Nađi jednadžbu tangenata na krug** $K \equiv x^2 + y^2 = 9$ **u točki** $x_0 = 2$.
$y' = -\frac{f'x}{f'y}$ slijedi $y' = -\frac{x}{y}$. Iz jednadžbe K izlazi za $x = 2$, da je $y_0 = \pm\sqrt{5}$. Dakle koeficijenat smjera tangente jest $a_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $a_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $T \equiv y - y_0 = a(x - x_0)$ t. j.
$T_1 \equiv 2x + \sqrt{5}y = 9$, $T_2 = 2x - \sqrt{5}y = 9$.

976 **Odredi jednadžbe tangenata na elipsu** $E \equiv 9x^2 + 4y^2 = 36$ **na mjestima** $x_1 = 1, x_2 = -1$ **i odredi ploštinu četverokuta, što ga zatvaraju te tangente.**
Nađi y_1 i y_2 iz jednadžbe E, a iz $y' = -\frac{f'x}{f'y}$ odredi koeficijente smjera u dotačištima (kojih ima 4). Primijenivši zatim jednadžbu pravca kroz jednu točku dobit ćeš: $T_1 \equiv 3x + 2\sqrt{3}y = 12$, $T_2 \equiv 3x - 2\sqrt{3}y = 12$, $T_3 \equiv 3x - 2\sqrt{3}y = -12$. $T_4 \equiv 3x + 2\sqrt{3}y = -12$.
Vrhove paralelograma dobit ćeš, kad riješiš jednadžbe T_1 i T_3, T_1 i T_2, T_2 i T_4, T_3 i T_4. Vrhovi su $A(0, 2\sqrt{3})$, $B(4, 0)$ $C(0, -2\sqrt{3})$, $D(-4, 0)$. Ploština paralelograma jest $P = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ ili ako se primijene vrhovi A, B, C: $P = x_2(y_3 - y_1)$, $P = -16\sqrt{3}$.

977. **U kojoj točki paralele** $P \equiv y = 3x^2 - 22x + 35$ **zatvara tangenta s pozit. X-osi kut** $\alpha = 60^0$?
$y' = 6x - 22$; $6x - 22 = \sqrt{3}$; $M_0\left(\frac{22+\sqrt{3}}{6}, -\frac{901}{12}\right)$.

978. **U kojoj točki parabole** $P \equiv y = x^2 + 5x + 6$ **zatvara tangenta s pozit. X-osi kut** $\alpha = 45^0$ **i koja je to tangenta?**
$y' = 2x + 5$; $2x + 5 = 1$; $M_0(-2, 0)$; $T \equiv y = x + 2$.

979. **U kojoj točki parabole** $P \equiv y = x^2 - 5x + 7$ **zatvara tangenta s pozit. X-osi kut** $\alpha = 75^0$?
$y' = 2x - 5$; $\text{tg}\ 75^0 = \text{cotg}\ 15^0 = 2 + \sqrt{3}$; $2x - 5 = 2 + \sqrt{3}$;
$M_0\left(\frac{7+\sqrt{3}}{2}, \frac{5+2\sqrt{3}}{2}\right)$.

980. **Nađi tangente parabole** $P \equiv y = x^2 + 2x - 15$ **na mjestima, gdje parabola siječe X-os i nađi kut, što ga zatvaraju te tangente.**
U jednadžbu parabole stavi $y = 0$, pa ćeš dobiti presjeke $M_1(3, 0)$, $M_2(-5, 0)$; $T \equiv y - y_0 = a(x - x_0)$. Iz $y' = 2x + 2$ izlazi $a_1 = 8$; $a_2 = -8$; $T_1 \equiv y = 8(x - 3)$, $T_2 \equiv y = -8(x + 5)$; $\text{tg}\ \varphi = \frac{16}{63}$; $\varphi = 14^0 15'$.

981. **Nađi tjeme krivulje** $y = x^2 + 2x - 15$ **pomoću ekstremnih vrijednosti te funkcije.**
$y' = 0$; $x = -1$; $y = -16$. $T(-1, -16)$.

982. **Dvije tangente parabole** $P \equiv y = \frac{1}{8}(x-1)^2 - 2$, **od kojih ima jedna dotačište** $M_1(1 - 4\sqrt{3}, 4)$, **a druga zatvara s pozit X-osi kut** $\alpha = 30^0$, **sijeku se u nekoj točki. Nađi koordinate sjecišta i kut, što ga zatvaraju te tangente.**
Pravac kroz točku M_1! Koeficijenat smjera a nađi pomoću derivacije. $y' = \frac{x-1}{4}$; $a_1 = \frac{x_0 - 1}{4} = -\sqrt{3}$.
$T_1 \equiv \sqrt{3}x + y + 8 - \sqrt{3} = 0$. Dotačište druge tangente jest $M_2\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$; $T_2 \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$; $S(2\sqrt{3} - 1, -2)$, $\varphi = 90^0$.

983. **Nađi jednadžbu tangente i koordinate njezina dotačišta na paraboli** $P\ y = \frac{1}{8}(x-1)^2 - 2$, **ako ta tan-**

genta zatvara s pozitiv. X-osi kut $\alpha = 120^0$.
$y' = \frac{1}{4}(x-1)$; $\frac{x-1}{4} = -\sqrt{3}$ ili $x_0 = 1-4\sqrt{3}$;
$y_0 = 4$; $T \equiv y - y_0 = y'(x-x_0)$, $T \equiv \sqrt{3}x + y + 8 - \sqrt{3} = 0$.

984. **Istostrana hiperbola, kojoj su asimptote koordinatne osi, ima jednadžbu $xy = 4$. Nađi jednadžbe tangenata na mjestima $x_0 = \pm 1$ i kut, što ga zatvaraju te tangente;**
Dotačišta su $M_1(1,4)$, $M_2(-1,-4)$. Da dobiješ koeficijenat smjera tangenata, deriviraj jednadžbu hiperbole $y = \frac{4}{x}$; $a_{1,2} = -4$; $T_1 \equiv y - 4 = -4(x-1)$; $T_2 \equiv y + 4 = -4(x+1)$; $\varphi = 0$.

985. **Pod kojim se kutom sijeku krivulje $K \equiv x^2 + y^2 = 41$, $H \equiv x^2 - y^2 = 9$ u sjecištu $M_0(5,4)$?**
Nađi kut, što ga zatvaraju tangente na krug i hiperbolu u točki M_0. Koeficijente smjera odredi pomoću derivacije! $a_1 = -5$; $a_2 = \frac{5}{4}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{25}{21}$;
$\varphi = 49^0 58' 12''$

986. **Pod kojim se kutom sijeku krivulje $E \equiv 4x^2 + 9y^2 = 144$, $H \equiv x^2 - y^2 = 16$?**
Traži manji kut, što zatvaraju u sjecištu tangente obiju krivulja. Koeficijente smjera tangenata odredi pomoću derivacije: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{13.65\sqrt{2}}{3.57.\sqrt{65}}$, $\varphi = 40^0 55' 9''$

987. **Gdje se i pod kojim se kutom dotiču krivulje $K \equiv x^2 + y^2 = 16$; $H \equiv x^2 - y^2 = 16$?**
Da dobiješ sjecišta, riješi jednadžbe. $M_1(4,0)$, $M_2(-4,0)$. U tim točkama odredi pomoću derivacije koeficijente smjera tangenata na obje krivulje.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_1}{y_1}}{1 - \frac{x_1^2}{y_1^2}} = -\frac{x_1 y_1}{8}.$$ Budući da je $y_1 = 0$, slijedi
$\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0^0$.

988. **Nađi pomoću derivacije tjemena hiperbole $H \equiv 16x^2 - 9y^2 = 144$.**

U tjemenima su tangente okomite na X-osi; dakle $y' = \infty$; $-\frac{16x}{9y} = \infty$; odatle: $y = 0$. $V_1(3,0)$, $V_2(-3,0)$.

989. **Na krivulju $y = 2x^2$ povuci tangentu paralelnu s pravcem $y = x - 3$ i nađi koordinate dotačišta.**
Primijeni derivaciju: $y' = -\frac{f'x}{f'y} = 4x$; dakle $x_0 = \frac{1}{4}$; $y_0 = \frac{1}{8}$; $T \equiv 8x - 8y - 1 = 0$.

990. **U kojoj točki parabole $P \equiv y^2 = 25x$ zatvara tangenta s pozit. X-osi kut $\alpha = 120^0$?**
$y' = -\sqrt{3}$; $\frac{25}{2y} = -\sqrt{3}$; $M_0\left(\frac{25}{12}, -\frac{25}{6}\sqrt{3}\right)$

991. **Nađi jednadžbe tangenata kruga $K \equiv x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ u točkama $M_1(4,7)$, $M_2(4,-1)$, $M_3(5,0)$ $M_4(5,6)$.**
$T \equiv y - y_0 = y'(x-x_0)$, $y' = -\frac{x-1}{y-3}$; $T_1 \equiv 3x + 4y - 40 = 0$; $T_2 \equiv 3x - 4y - 16 = 0$; $T_3 \equiv 4x - 3y - 20 = 0$; $T_4 \equiv 4x + 3y - 38 = 0$.

992. **Nađi pomoću derivacije tangentu hiperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ u točki $M_0(5, 9/4)$.**
$T \equiv y - \frac{9}{4} = y'(x-5)$; $y' = -\frac{9x}{-16y}$. Ovamo uvrsti koordinate točke M_0, pa ćeš dobiti $y' = \frac{5}{4}$. Dakle: $y - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}(x-5)$, ili $T \equiv 5x - 4y - 16 = 0$.

993. **Nađi pomoću derivacije tjemena hiperbole $H \equiv 16x^2 - 96x - 9y^2 + 36y - 36 = 0$.**
$y' = \infty$; $-\frac{16x-48}{-9y+18} = \infty$; $9y = 18$; $V_1(0,2)$, $V_2(6,2)$.

994. **Nađi dotačište one tangente na krivulju $y = 2x^2 + 2x + 1$, koja s X-osi zatvara kut 30^0. Koju jednadžbu ima ta tangenta?**
Pomoću derivacije nađi koeficijenat smjera tangente i stavi $y' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ t. j. $4x_0 + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $M_0\left(\frac{\sqrt{3}-6}{12}, \frac{13}{24}\right)$;
$T \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7+4\sqrt{3}}{24}$.

995. **Koji koeficijenat smjera ima tangenta kruga $K \equiv 47x^2 + 47y^2 - 37x - 133y - 822 = 0$ u točki $M_0(0,-3)$?**

U derivaciju uvrsti koordinate točke M_0! $a = -\frac{37}{415}$.

996. **Nađi tangente kruga $K \equiv x^2+y^2-2x-6y-15=0$, koje imaju dotačišta $M_1(4,7)$, $M_2(4,-1)$ i odredi njihovo sjecište.**

$y' = -\frac{x-1}{y-3}$. Ovamo uvrsti koordinate točaka M_1 i M_2, a zatim primijeni jednadžbu pravca kroz jednu točku. $T_1 \equiv 3x+4y-40=0$; $T_2 \equiv 3x-4y-16=0$. Sjecište jest $M_0\left(\frac{28}{3}, 3\right)$.

997. **Nađi jednadžbe tangenata kruga $K\equiv x^2+y^2-12x+10y-39=0$, koje su paralelne s pravcem $y=x+1$.**

$y'=1$; otuda $x+y-1=0$. Ova jednadžba i jednadžba kruga daju dotačište $M_1(6+5\sqrt{2}, -5-5\sqrt{2})$, $M_2(6-5\sqrt{2}, -5+5\sqrt{2})$; $T_{1,2}\equiv x-y-11\mp 10\sqrt{2}=0$.

998. **U kojoj točki parabole $P\equiv 4x^2-4x+4y-5=0$ zatvara tangenta s pozit. X-osi kut $\alpha=60^0$?**

$y'=\sqrt{3}$; $-\frac{8x-4}{4}=\sqrt{3}$; $M_0\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

999. **Nađi dotačište one tangente na paraboli $P\equiv y^2-6y-8x-63=0$, koja zatvara s pozit. X-osi kut $\alpha=45^0$.**

$y'=1$; $-\frac{-8}{2y-6}=1$; $M_0(-7,7)$.

1000. **U kojim točkama kruga $K\equiv x^2+y^2-6x-2y+8=0$ zatvaraju tangente s pozit. X-osi kut 135^0?**

$y'=-\frac{2x-6}{2y-2}=-1$ ili $x=y+2$. To uvrsti u K. Dobit ćeš $M_1(4,2)$, $M_2(2,0)$.

1001. **Kolik je koeficijenat smjera a tangente na elipsu $E\equiv 9x^2+9y^2+54x+250y+481=0$ u točki $M_0\left(1,\frac{4}{5}\right)$?**

$y'=-\frac{f'x}{f'y}=-\frac{9x+27}{25y+125}=-\frac{9}{25}\cdot\frac{x+3}{y+5}$; $a=-\frac{36}{145}$.

1002. **Isto za točku $M_0\left(1,-\frac{14}{5}\right)$.**

Postupak kao u prijašnjem zadatku: $a=y'=-\frac{36}{55}$.

1003. **Kolika je tangenta i subtangenta kruga $K\equiv x+y^2-6x+10y-27=0$, ako dotačišta tangenata imaju apcisu 9?**

$y'=-\frac{x-3}{y+5}$. Tangente imaju dotačišta $M_1(9,0)$ $M_2(9,-10)$. Prema tome $a_1=-\frac{6}{5}$; $a_2=\frac{6}{5}$; $T_1\equiv y=-\frac{6}{5}(x-9)$; $T_2\equiv y+10=\frac{6}{5}(x-9)$. Pod „tangentom" se razumijeva dužina tangente od dotačišta do sjecišta njezina s X-osi; subtangenta je projekcija tangente; $t_1=0$, $t_{s1}=0$; $t_2=\frac{5}{3}\sqrt{61}$; $t_{s2}=\frac{52}{3}-9=\frac{25}{3}$.

1004. **Gdje se sijeku normale kruga $K\equiv x^2+y^2-14x-4y-5=0$ podignute na mjestima A(10, 9), B(10, —5)?**

$N\equiv y-y_0=-\frac{1}{y'}(x-x_0)$; $N_1\equiv y-9=\frac{7}{3}(x-10)$; $N_2\equiv y+5=-\frac{7}{3}(x-10)$. $S(7, 2)$.

1005. **Nađi tangente na krug $K\equiv x^2+y^2-12x+10y-39=0$ paralelne s X-osi.**

Uvjet je $y'=0$; $y'=-\frac{f'x}{f'y}$ t. j $-\frac{x-6}{y+5}=0$. Odatle: $x_0=6$, $y_0=-5\pm10$. Dotačišta su dakle $M_1(6,5)$, $M_2(6,-15)$. $T_1\equiv y-5=0$; $T_2\equiv y+15=0$.

1006. **Odredi pomoću derivacije jednadžbe tangenata kruga $K\equiv x^2+y^2-8x-9=0$ u točkama, gdje krug siječe Y-os.**

$y'=-\frac{f'x}{f'y}=-\frac{2x-8}{2y}$. $T_1\equiv 4x-3y+9=0$; $T_2\equiv 4x+3y+9=0$.

1007. **Nađi pomoću derivacije tangente na krug $K\equiv x^2+y^2=36$ na mjestu $x_0=3$.**

$y'=-\frac{f'x}{f'y}=-\frac{x}{y}$; $a=-\frac{x_0}{y_0}$; y_0 nađi iz K! $y_0=\pm3\sqrt{3}$, $a=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$. $T_1\equiv x+\sqrt{3}y-12=0$; $T_2\equiv x-\sqrt{3}y-12=0$.

1008. **Nađi jednadžbu one tangente na parabolu $P\equiv y^2=8x$, koja s pozit. X-osi zatvara kut $\alpha=60^0$ i odredi sjecište tangente s X-osi.**

$y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $y^2 - 8x = 0$, $y' = -\frac{8}{2y} = -\frac{4}{y}$. Odatle: $-\frac{4}{y_0} = \sqrt{3}$, $y_0 = -\frac{4}{\sqrt{3}}$, $x_0 = \frac{2}{3}$. $T = 3\sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} = 0$, $M_0(-{}^2/_3, 0)$.

1009. Gdje se sijeku tangente kruga $K \equiv x^2 + y^2 - 14x - 4y - 5 = 0$, koje imaju dotačišta A (10, 9), B (10, —5)?
$T \equiv y - y_0 = y'(x - x_0)$; $T_1 \equiv 3x + 7y - 93 = 0$, $T_2 \equiv 3x - 7y - 65 = 0$; $S\left(\frac{72}{3}, 2\right)$.

1010. Pomoću ekstremnih vrijednosti funkcije odredi polumjer kruga $K \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.
Dijametar ćeš dobiti tako, da minimum odbiješ od maksimuma. Iz $y' = 0$ slijedi $-\frac{2x-6}{2y-2} = 0$ ili $x = 3$, $y_{max} = 1 + \sqrt{2}$; $y_{min} = 1 - \sqrt{2}$; $r = \sqrt{2}$.

1011. Nađi računom ekstremnih vrijednosti polumjer kruga $K \equiv x^2 + y^2 + 10y = 0$ i derivacijom odredi kut, što ga s X-os zatvara tangenta, kojoj je dotačište u $M_0\left[\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}(2 + \sqrt{3})\right]$.
Postupak kao u prijašnjem zadatku. $y_{max} = 0\alpha$ $y_{min} = -10$, $2r = y_{max} - y_{min} = 10$, $r = 5$; $tg\, \alpha = y'$; $\alpha = 30^0$.

1012. Nađi metodom ekstremnih vrijednosti poluosi i središte elipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 40x + 18y + 73 = 0$.
$2b = y_{max} - y_{min}$; ordinata središta $q = y_{max} - b$. Da nađeš $2a$ imaj na umu, da su u lijevom i desnom tjemenu ove elipse tangente paralelne s Y-osi t. j. uvijet je $y' = \infty$. Odatle: $a = 3$, $b = 2$, $S(5, -1)$.

1013. Nađi poluosi i središte elipse $E \equiv 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$.
Vidi uputu u prijašnjem zadatku. $a = 3$, $b = 2$, $S(2, 1)$.

1014. Nađi poluosi i središte elipse $E \equiv 4x^2 + 25y^2 - 56x - 200y + 496 = 0$.
Vidi uputu u 944. zadatku. $a = 5$, $b = 2$, $S(7, 4)$.

1015. Nađi poluosi i središte elipse $E \equiv 9x^2 + 25y^2 + 54x + 250y + 481 = 0$.
Vidi uputu u 1014. zadatku. $a = 5$, $b = 3$, $S(-3, 5)$.

1016. Nađi koordinate tjemena parabole $P \equiv y^2 - 6y - 8x - 63 = 0$ pomoću derivacije i potvrdi to dopunjivanjem zadane jednadžbe na oblik $(y - q)^2 = a(x - p)$.
Tjeme ima najmanju ordinatu. Uvjet za minimum jest $y' = 0$. $T(-9, 3)$, $P \equiv (y - 3)^2 = 8(x + 9)$.

1017. Isti zadatak za $P \equiv 4x^2 - 4x + 4y = 5$.
$T\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $P \equiv y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$.

1018. Pod kojim se kutom sijeku krivulje $K \equiv x^2 + y^2 = 41$ i $H \equiv x^2 - y^2 = 9$ u točki $M_0(5, 4)$?
Koeficijente smjera tangenata na te krivulje u M_0 odredi pomoću derivacije $y' = -\frac{f'x}{f'y}$; $tg\, \varphi = \frac{25}{21}$, $\varphi = 49^0\, 58'\, 12''$.

1019. Jedno sjecište krugova $K_1 \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$, $K_2 \equiv x^2 + y^2 - 26x - 12y + 115 = 0$ jest $M_0(4, 9.)$ Pod kojim se kutom sijeku ti krugovi u točki M_0?

Pomoću derivacije $y' = -\frac{f'x}{f'y}$ nađi koeficijente smjera tangenata tih krugova u točki M_0! $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $tg\, \varphi = 3$, $\varphi = 71^0 34'$.

1020. Pod kojim se kutom sijeku krivulje $K \equiv 3x^2 + 3y^2 = 36$ i $P \equiv y^2 = 4x$?
Nađi koeficijente smjera tangenata u jednom sjecištu tih krivulja pomoću derivacije. — Jedno je sjecište $M_1(2, 2\sqrt{2})$; $a_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $tg\, \varphi = 2\sqrt{2}$, $\varphi = 70^0\, 31'\, 45''$.

1021. Da li funkcija (krivulja) $y = -5x^2 + 2x - 2$ na mjestima $x = 2, x = -1$ raste ili pada? Gdje je tjeme te krivulje?
Nađi derivaciju krivulje i ispitaj, koji ima predznak, kad uvečaš x. Ako derivacija ostaje pozitivna,

krivulja u zadanoj točki raste, a ako ostaje negativna, pada. Derivacija je $y' = -10x + 2$. Za $x = 2$ jest $y' = -20 + 2 < 0$, a za $x = 3$ jest $y' = -30 + 2 < 0$; funkcija dakle na mjestu $x = 2$ pada. Za $x = -1$ ima derivacija vrijednost $y' = -9 < 0$, a za $x = 0$ ima vrijednost $y' = +2 > 0$; funkcija dakle na mjestu $x = -1$ raste. — Tjeme parabole naći ćeš iz uvjeta $y' = 0$. $T\left(\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

1022. Ispitaj tok funkcije (krivulje) $y = \frac{(x-2)^2}{8} + 3$ na mjestima $x = -3$, $x = 4$ i odredi tjeme krivulje.

Vidi uputu prijašnjega zadatka. $y' = \frac{x-2}{4}$. Za $x = -3$ jest $y' = -\frac{5}{4} < 0$, za $x = -2{\cdot}5$ jest $y' = -\frac{4{\cdot}5}{4} < 0$. Funkcija dakle na mjestu $x = -3$ pada. Za $x = 4$ jest $y' = \frac{1}{2} > 0$, a za $x = 5$ jest $y' = \frac{3}{4} > 0$ t. j. funkcija na mjestu $x = 4$ raste. Tjeme nađi iz uvjeta $y' = 0$. $T(2, 3)$.

1023. Ispitaj tok funkcije (krivulje) $y = \frac{(x+2)^2}{8} + 2$ na mjestima $x = -3$, $x = -1$ i nađi koordinate tjemena te krivulje.

Postupak kao u pređašnjim zadacima. $y' = \frac{x+2}{4}$. Na mjestu $x = -3$ ima derivacija vrijednost $y' = -\frac{1}{4} < 0$, a na mjestu $x = -2{\cdot}5$ ima vrijednost $y' = -\frac{0{\cdot}5}{4} < 0$. Funkcija dakle na mjestu $x = -3$ pada. Na mjestu $x = -1$ ima derivacija vrijednost $y' = \frac{1}{4} > 0$, a na mjestu $x = 0$ ima vrijednost $y' = \frac{1}{2} > 0$. Funkcija dakle na mjestu $x = -1$ raste. Iz $y' = 0$ dobit ćeš $T(-2, 0)$.

1024. Ispitaj tok funkcije (krivulje) $y = -\frac{(x-1)^2}{6} + 3$ na mjestima $x = 0$, $x = 4$.

Postupak kao u pređašnjim zadacima. $y' = -\frac{x-1}{3}$. Za $x = 0$ jest $y' = \frac{1}{3} > 0$, a za $x = 0{\cdot}5$ jest $y' = \frac{1}{6} > 0$. Funkcija na mjestu $x = 0$ raste. — Za $x = 4$ jest

$y' = -1 < 0$, a za $x = 5$ jest $y' = -\frac{4}{3} < 0$. Funkcija na mjestu $x = 4$ pada.

1025. Ispitaj tok funkcije (krivulje) $y = -\frac{(x+2)^2}{10} - 4$ na mjestima $x = -5$, $x = 2$.

Postupak kao u pređašnjim zadacima. $y' = -\frac{x+2}{5}$. Za $x = -5$ jest $y' = \frac{3}{5} > 0$, a za $x = -4$ jest $y' = \frac{2}{5} > 0$. Funkcija na mjestu $x = -5$ raste. Za $x = 2$ jest $y' = -\frac{4}{5} < 0$, a za $x = 3$ jest $y' = -1 < 0$. Funkcija na mjestu $x = 2$ pada.

1026. Ispitaj tok funkcije (krivulje) $y = 3x^2 - 24x + 24$ na mjestima $x = 3$, $x = 5$.

Postupak kao u pređašnjim zadacima. $y' = 6x - 24$. Za $x = 3$ jest $y' = -6 < 0$, a za $x = 3{\cdot}5$ jest $y' = -3 < 0$. Funkcija na mjestu $x = 3$ pada. Za $x = 5$ jest $y' = 6 > 0$, a za $x = 6$ jest $y' = 12 > 0$. Funkcija na mjestu $x = 5$ raste.

1027. Ispitaj tok funkcije (krivulje) $y = x^2 - 6x + 4$ na mjestima $x = 0$, $x = 7$.

Postupak kao u prijašnjim zadacima. $y' = 2x - 6$. Za $x = 0$ jest $y' = -6 < 0$, a za $x = 1$ jest $y' = -4 < 0$. Funkcija na mjestu $x = 0$ pada. — Za $x = 7$ jest $y' = 8 > 0$, a za $x = 8$ jest $y' = 10 > 0$ Funkcija na mjestu $x = 7$ raste.

§ 32. PRIMJENA DERIVACIJE NA FIZIKU.

1028. Tijelo se počne jednoliko gibati u vremenu $t = 0$ i prevali u vremenu $t = 3$ sek put $s = 5$ m. Koju ima brzinu to tijelo?

Jednoliko gibanje ovoga tijela predočeno je pravcem, koji prolazi koord. ishodištem i točkom $M_1(3, 5)$, t. j. pravcem $s = \frac{5}{3}t$. Budući da je $v = \frac{ds}{dt}$ (t. j. = derivaciji puta po vremenu), slijedi $v = \frac{5}{3}\frac{\text{m}}{\text{sek}}$.

1029. Koju brzinu ima tijelo, koje se giba po zakonu $8t - 5s - 2 = 0$?

Načini derivaciju ove implicitne funkcije po vremenu (t je argumenat, a s funkcija). $y' = -\frac{f't}{f's} = \frac{8}{5} = 1\cdot6$; dakle $v = 1\cdot6 \frac{m}{sek}$.

1030. Na grafičnom je voznom redu predočeno gibanje vlaka pravcem, koji ima prikloni kut 60^0; kolika je brzina toga vlaka?

$v = \frac{ds}{dt}$, a kako ovaderivacija znači koeficijenat smjera, to je brzina jednaka tangensu priklonoga kuta toga pravca. Prema tome će biti $v = tg\,60^0 = \sqrt{3} = 1\cdot732 \frac{km}{min}$.

1031. Tijelo bačeno vertikalno uvis giba se po zakonu $s = ct - \frac{g}{2} t^2$. Po kojem se zakonu mijenja brzina toga tijela? Koliku ima brzinu to tijelo nakon 5 sekunda, otkako je bačeno uvis brzinom $c = 600 \frac{m}{sek}$?

Budući da je $v = \frac{ds}{dt}$, slijedi $v = c - gt$.
$v = 600 - 9\cdot80.5 = 551 \frac{m}{sek}$.

1032. Tijelo bačeno uvis pod kutom α giba se po zakonu $s = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$? Po kojem se zakonu mijenja njegova brzina? Koliku će imati tijelo brzinu nakon 5 sekunda, otkako je bačeno pod kutom 60^0 brzinom $c = 600 \frac{m}{sek}$?

Postupak kao u pređašnjem zadatku.
$v = c\,.\sin \alpha - gt$, $\quad v = 470\cdot6 \frac{m}{sek}$.

1033. Tane izleti iz puške pod kutom $\alpha = 15^0$ brzinom $c = 600 \frac{m}{sek}$. Do koje će se visine tane dići, ako je vertikalna komponenta puta dana izrazom $y = ct \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2$ i ako se ne uzme u obzir otpor uzduha?

Pita se y_{max}. Za to je uvjet $y' = 0$. Odatle $t = \frac{c}{g} \sin \alpha$ (= vrijeme dizanja taneta). Kad to uvrstiš u y, dobit ćeš: $y_{max} = \frac{c^2}{2g} sin^2 \alpha = 1205\cdot8\,m$.

1034. Put tijela, koje se giba nejednoliko, dan je izrazom $s = 4t^5 - 7t^3 + 5t^2$. Kojim je izrazom predočena brzina toga tijela? Kolik je put tijelo prevalilo u jednoj sekundi i u dvije sekunde? Kolike su mu bile brzine u tim momentima?

$v = \frac{ds}{dt}$ t. j. $v = 20t^4 - 21t^2 + 10t$.
$s_1 = 2,\ s_2 = 92;\ v_1 = 9,\ v_2 = 256.$

1035. Elongacija s točke, koja izvodi harmoničko gibanje, dana je izrazom $s = a\,.\sin 2\pi \frac{t}{T}$. Kojim je izrazom dana brzina te točke u vremenu t? Kolika je elongacija i brzina točke u vremenu $t = \frac{T}{4}$?

$v = \frac{ds}{dt}$ t. j. traži derivaciju funkcije od funkcije!
$v = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}$; $s = a\,.\sin 2\pi \frac{T}{4}$; $T = a \sin \frac{\pi}{2} = a$;
$v = \frac{2a\pi}{T}\,.\cos \frac{\pi}{2} = 0.$

1036. Tijelo se giba po zakonu $s = t^3 - t^2 + t$; kolika mu je akceleracija na koncu 1. i na koncu 2. sekunde?

Nađi brzinu, a onda uzmi u obzir, da je akceleracija $a = \frac{dv}{dt}$. $v = 3t^2 - 2t + 1$; $a = 6t - 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 10$.

1037. Tijelo se giba po zakonu $s = 5t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 2t - 1$; kolika mu je brzina na koncu 2. i 3. sekunde, a kolika akceleracija u tim momentima?

$v = \frac{ds}{dt} = 20t^3 - 12t^2 - 6t + 2$; $a = \frac{dv}{dt} = 60t^2 - 24t - 6$;
$v_2 = 102,\ v_3 = 416;\ a_2 = 186,\ a_3 = 462.$

1038. Koliki put prevali tijelo u drugoj sekundi, ako se ono giba po zakonu : $s = 10 + 5t^2 - 3t^3$ i koliku ima akceleraciju u tom momentu?

$s_2. = s_2 - s_1 = 6 - 12 = -6$; $v = 10t - 9t^2$;
$a = 10 - 18t$; $a_2 = -26$.

1039. Kako će se dugo dizati tane ispaljeno vertikalno uvis brzinom $c = 800 \frac{m}{sek}$ i kako će visoko dići?

$s = ct - \frac{g}{2} t^2$. Prije nego se počne tane vraćati natrag, imat će u momentu kulminacije brzinu = 0. Dakle $\frac{ds}{dt} = 0$ ili $c - gt = 0$. Odatle: $t = \frac{c}{g} = \frac{800}{9\cdot8} = 81\cdot5$ *sek.* — Traži s_{max} t. j. u izraz za s uvrsti $t = \frac{c}{g}$. Dobit ćeš $s_{max} = \frac{c^2}{2g} = \frac{800^2}{2.9\cdot8} = 8163\cdot3$ *km.*

1040. **Kojom brzinom c treba tijelo baciti vertikalno dolje, da prispije u dubljinu 120 m brzinom 60 $\frac{m}{sek}$? U kojem je vremenu prevaljen taj put?**
$s = ct + \frac{g}{2} t^2$, $v = \frac{ds}{dt} = c + gt$. Jednadžbe $120 = ct + \frac{g}{2} t^2$, $c + gt = 60$ daju $34{\cdot}6 \frac{m}{sek}$, $t = 2{\cdot}5$ sek. $\left(g = 10 \frac{m}{sec}\right)$.

1041. **Kojom se brzinom mora ispaliti kugla pod kutom $\varphi = 45^0$, da se digne 2 km visoko?**
Traži s_{max} izraza $s = ct \sin \varphi - \frac{g}{2} t^2$ i stavi $s_{max} = 2000$. Iz uvjeta $\frac{ds}{dt} = 0$ slijedi: $t = \frac{c}{g} \sin \varphi$. Supstitucijom ćeš dobiti $2000 = \frac{c^2}{g} \sin^2 \varphi - \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{2g}$ ili $2000 = \frac{c^2}{2g} \sin^2 \varphi$. Jer je $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, slijedi: $c^2 = 8000\, g$. Ako uzmeš $g = 10 \frac{m}{sek^2}$, dobit ćeš $c = 200\sqrt{2} = 282{\cdot}8 \frac{m}{sek}$.

1042. **Put s, što ga tijelo prevaljuje na kosini priklonoga kuta α, dan je formulom $s = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha$. Kojom je formulom dana brzina v? Koliku ima brzinu tijelo na kosini, gdje je $\alpha = 30^0$, nakon 5. sekunde?**
$v = \frac{ds}{dt}$ t. j. deriviraj put s po vremenu!
$v = gt \sin \alpha = 25 \frac{m}{sek}$ $\left(\text{uz } g = 10 \frac{m}{sek^2}\right)$.

1043. **Neko tijelo rotira nejednoliko, a kutna se brzina ω kod toga mijenja po zakonu $\omega = 3t^2 - t$. Kolika je akceleracija α toga tijela u 4. sekundi?**
Kutna je akceleracija jednaka derivaciji kutne brzine ω po vremenu t. j. $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$; $\alpha = 6t - 1$; $\alpha_4 = 23$.

1044. **Ako Φ znači broj magnetskih silnica, što prolaze okomito kroz plohu vodiča, a T vrijeme jednoga okreta vodiča (n. pr. kod dinamostroja), onda je elektromotorna sila izmjenične struje dana formulom $E = \Phi . \frac{\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}$. Kada E poprima najveću vrijednost E_{max}?**
$\Phi \frac{\pi}{T}$ je konstantna veličina, pa će E poprimiti najveću vrijednost onda, kad će najveću vrijednost — a ta je ± 1 — poprimiti izraz $\sin \frac{2\pi t}{T}$. To je pak onda, kad je $\frac{2\pi t}{T} = (2m - 1) . \frac{\pi}{2}$, gdje m poprima vrijednosti 1, 2, 3 ... Iz ove relacije slijedi $t = \frac{(2m-1) . T}{4}$. Prema tome će elektromotorna sila imati najveću vrijednost u momentima $t = \frac{T}{4}, 3\frac{T}{4}, 5\frac{T}{4}$ itd. $E_{max} = \pm \Phi \frac{\pi}{T}$.

1045. **Krug od žice polumjera r nabijen je s Q elektrostatskih jedinica. Kolikom silom djeluje ta elektriciteta (u smjeru polumjera) kruga? — Sila jednaka je derivaciji potencijala $\frac{Q}{r}$ po smjeru te sile, ali s protivnim predznakom.**
Ovdje je smjer sile smjer polumjera, pa se mora $\frac{Q}{r}$ derivirati po r. $F = -\frac{d\left(\frac{Q}{r}\right)}{dr} = \frac{Q}{r^2}$.

1046. **Površina kugle polumjera $r = 4$ cm nabita je s 300 elektrostatskih jedinica. Kolikom silom djeluje taj naboj na jednu elektrostat. jedinicu, koja je smještena 1 cm izvan kugle? — Potencijal elekt. mase M jednoliko razdijeljene po površini kugle u točki, koja je izvan kugle, a ima udaljenost od središta kugle u, jest $V = \frac{M}{u}$.**
$F = -\frac{dV}{du} = -\frac{d\left(\frac{M}{u}\right)}{du} = \frac{M}{u^2}$; $F = \frac{300}{(4+1)^2} = 12$ *dina.*

1047. **Ako δ znači prostornu gustoću električnoga naboja, r polumjer pune kugle (od izolatora), a u daljinu točke od središta kugle, onda je općeni izraz za potencijal naboja $V = 2\pi \delta r^2 - \frac{2}{3}\pi \delta u^2$. Kako glasi općeni izraz za silu, kojom taj naboj djeluje na jedinicu naboja u toj točki? Pri tom imaj na umu, da je sila $f = -\frac{dV}{du}$.**
$f = -\frac{d(2\pi \delta r^2 - {}^2/_3 \pi \delta u^2)}{du} = \frac{4}{3}\pi \delta u$.

1048. **Ako δ znači prostornu gustoću električnoga naboja, r polumjer pune kugle (od izolatora), a u daljinu točke od središta kugle, onda je općeni izraz za potencijal naboja $V = 2\pi \delta r^2 - \frac{2}{3}\pi \delta u^2$. — Nađi, u kojima je točkama najveći potencijal.**

Uvjet za maksimum potencijala jest $\frac{dV}{du} = 0$.
Odatle: $-\frac{4}{3}\pi\delta u = 0$ ili $u = 0$ *t. j. najveći mu je potencijal u središtu kugle,* a vrijednost mu je $V_{max} = 2\pi\delta r^2$.

§ 33. PRIMJENA INTEGRALA NA GEOMETRIJU.

Vidi još i zadatke pod brojevima: 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 914, 917, 949, 950.

1049. Oko X-osi rotira pravac y = r; nađi volum rotacionoga tijela, ako ono ima visinu *v*.

$V = \pi\int_a^b y^2\,dx$; $\quad V = \pi\int_0^v r^2\,dx = \pi r^2\int_0^v dx = \pi r^2 v$ *(valjak)*.

1050. Oko X-osi rotira pravac y = x; nađi volum nastaloga stošca visine *v* i dobiveni izraz potvrdi stereometrijskim izvođenjem.

$V = \pi\int_0^v y^2\,dx = \pi\int_0^v x^2\,dx = \frac{\pi}{3}\Big|_0^v x^3 = \frac{\pi v^3}{3}$.

1051. Oko X-osi rotira pravac y = x; nađi volum krnjega stošca, što ga kod rotacije opisuju taj pravac i ordinate na mjestima x = a, x = b.

$V = \pi\int_a^b x^2\,dx = \frac{\pi}{3}\Big|_a^b x^3 = \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)$. Visina toga stošca jest $v = b - a$, pa možeš zbog $b^3 - a^3 = (b - a)\times(b^2 + ab + a^2)$ pisati $V = \frac{\pi}{3}\,v\,(b^2 + ab + a^2)$.

1052. Oko X-osi rotira pravac y = 2x; nađi volum krnjega stošca, što ga kod rotacije opisuju taj pravac i ordinate na mjestima x = 3, x = 9.

$V = \pi\int_3^9 y^2\,dx = \pi\int_3^9 4x^2\,dx = \frac{4}{3}\pi\Big|_3^9 x^3 = 936\pi$.

1053. Oko X-osi rotira krug $y^2 = 2rx - x^2$ (vršna jednadžba!), pa pri tom nastaje kugla. Nađi volum kugle.

$V = \pi\int_0^{2r}(2rx - x^2)\,dx = \pi\int_0^{2r}2rx\,dx - \pi\int_0^{2r}x^2\,dx =$
$= 2r\pi\int_0^{2r}x\,dx - \pi\int_0^{2r}x^2\,dx = r\pi\Big|_0^{2r}x^2 - \frac{\pi}{3}\Big|_0^{2r}x^3 = 4r^3\pi -$
$-\frac{8}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$.

1054. Oko X-osi rotira krug $y^2 = 2rx - x^2$; nađi volum kuglina segmenta, što ga zatvara ordinata na mjestu x = v.

$V = \pi\int_0^v y^2\,dx = \pi\int_0^v(2rx - x^2)\,dx = r\pi\Big|_0^v x^2 - \frac{\pi}{3}\Big|_0^v x^3 =$
$= r\pi v^2 - \frac{\pi}{3}v^3 = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$.

1055. Nađi volum kuglina sloja, što ga opisuju luk kruga $y^2 = 2rx - x^2$ i ordinate na mjestima x = a, x = b, ako je r = 10, a = 3, b = 6.

$V = \pi\int_a^b(2rx - x^2)\,dx = r\pi\Big|_a^b x^2 - \frac{\pi}{3}\Big|_a^b x^3 = \frac{1}{3}[3r\pi(b^2 - a^2) -$
$-\pi(b^3 - a^3)]$.

Ako debljinu sloja $b - a$ označiš sa *d*, moći ćeš pisati: $V = \frac{d\pi}{3}[3r(b + a) - a^2 - ab - b^2]$; $V = 207\pi$.

1056. Nađi volum paraboloida, koji nastane rotacijom parabole $y^2 = 6x$, a visina mu je x = 10.

$V = \pi\int_0^{10}y^2\,dx = \pi\int_0^{10}6x\,dx = 6\pi\int_0^{10}x\,dx$;
$V = 3\pi\Big|_0^{10}x^2 = 300\pi$.

1057. Nađi volumm elipsoida, koji nastane rotacijom elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ oko X-osi.

$V = \pi\int_{-2}^{+2}y^2\,dx = \pi\int_{-2}^{+2}\frac{36 - 9x^2}{4}\,dx = 9\pi\int_{-2}^{+2}dx -$
$-\frac{9}{4}\pi\int_{-2}^{+2}x^2\,dx = 36\pi - 12\pi$; $\quad V = 24\pi$.

1058. Nađi volum sloja elipsoida, koji nastane rotacijom elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ oko X-osi, a omeđuju ga ordinate na mjestima $x = 1$, $x = 2$.

$V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 \left(4 - \frac{4}{9}x^2\right) dx = \frac{80}{27}\pi.$

1059. Nađi volum hiperboloida visine $v = 6$, koji je nastao rotacijom desne grane hiperbole $x^2 - y^2 = 16$ oko X-osi.

$V = \pi \int_4^{10} (x^2 - 16)\, dx = \frac{\pi}{3} \Big|_4^{10} x^3 - 16\pi \Big|_4^{10} x = 216\pi.$

1060. Nađi volum hiperboloida visine $v = 6$, koji je nastao rotacijom desne grane hiperbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ oko X-osi.

$V = \pi \int_2^8 \left(\frac{9}{4}x^2 - 9\right) dx = \frac{3}{4}\pi \Big|_2^8 x^3 - 9\pi \Big|_2^8 x; \quad V = 324\pi.$

1061. Nađi volum paraboličnoga zrcala, kojemu je normalni presjek iz tjemena na otvor parabola $y^2 = 20x$, a visina (od tjemena do otvora) $x = 5$ cm.

$V = \pi \int_0^5 y^2 dx = \pi \int_0^5 20x\, dx = 20\pi \int_0^5 x\, dx;$

$V = 250\,\pi\ cm^3.$

1062. Nađi volum paraboličnoga zrcala, kojemu ima prerez po osi ploštinu $P = \frac{100}{3}\sqrt{5}$; visina mu je 5.

Os zrcala neka se podudara s X-osi. Kontura prereza jest parabola oblika $y^2 = 2px$, a ploština lika, što ga zatvara parabola i tetiva (dvostruka ordinata y_0) na mjestu x_0, jest $P = 2 \cdot \frac{2}{3} x_0 y_0$. Jer je ovdje $P = \frac{100}{3}\sqrt{5}$, $x_0 = 5$, slijedi: $\frac{100}{3}\sqrt{5} = \frac{4}{3} 5 y_0$ ili $y_0 = 5\sqrt{5}$. Koordinate točke $M_0(5, 5\sqrt{5})$ moraju zadovoljavati jednadžbu $y^2 = 2px$, pa otuda slijedi $2p = 25$. Zrcalo je dakle nastalo rotacijom parabole $y^2 = 25x$ oko X-osi.

$V = \pi \int_0^5 y^2 dx = 25\pi \int_0^5 x\, dx = \frac{25\pi}{2} \Big|_0^5 x^2 = \frac{625}{2}\pi.$

1063. Nađi volum eliptičkoga zrcala visine $v = 3$ cm, koje je nastalo rotacijom elipse $y^2 = \frac{32}{5}x - \frac{16}{25}x^2$ oko X-osi.

$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{32}{5}x - \frac{16}{25}x^2\right) dx = \frac{16}{5}\pi \Big|_0^3 x^2 - \frac{16}{25.3}\pi \Big|_0^3 x^3;$

$V = \frac{576}{25}\pi\ cm^3.$

1064. Nađi oplošje kugle, koja nastaje rotacijom kruga $x^2 + y^2 = r^2$ oko X-osi. — Oplošje rotacionoga tijela dano je formulom $O = 2\pi \int_{-r}^{+r} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

$y' = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{x}{y}; \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}.$

Prema tome $y\sqrt{1 + y'^2} = a$. Uvrsti to u podintegralnu funkciju. $O = 2\pi \int_{-r}^{+r} r\, dx = 2r\pi \Big|_{-r}^{+r} x = 4r^2\pi.$

1065. Nađi plašt krnjega stošca, što nastane rotacijom onoga komada pravca $y = x$, što leži između ordinata na mjestima $x = 2$, $x = 8$. — Plašt se izračuna pomoću formule $O = 2\pi \int y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

$P = 2\pi \int_2^8 y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_2^8 y\sqrt{2}\, dx = 2\sqrt{2}\pi \int_2^8 x dx =$

$= 60\sqrt{2}\,\pi.$

§ 34. Primjena integrala na fiziku.

1066. Radnja R, što je obavlja sila p na putu s, dana je izrazom $R = \int_{s_0}^{s_1} p ds$. Kolika je obavljena radnja kod harmoničkoga gibanja kuglice mase $m = 10$ g u $\frac{1}{4}$ titraja, ako njezin potpuni titraj traje 8 sek, a amplituda A titraja jest 12 cm?

Iz zadatka 1035. slijedi $s_0 = 0$, $s_1 = A$. $p = a\,m$. 981 dina. Iz formule za elongaciju s dobit ćeš ponovnim deriviranjem $a = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \sin 2\pi \frac{t}{T}$ ili $a = -\frac{4\pi^2}{T^2} s$.

Prema tome $p = -\frac{4\pi^2 m}{T^2} s$. 981 dina.

$$R = \int_{s_0}^{s_1} -\frac{4\pi^2 m}{T^2}\cdot 981 . s ds = -981\frac{4\pi^2 m}{T^2}\cdot\int_{s_0}^{s_1} s ds =$$

$$= -981\frac{4\pi^2 m}{T^2}\Big|_{s_0}^{s_1}\frac{s^2}{2} \text{ ili } R = -981\frac{2\pi^2 m}{T^2}(s_1^2 - s_0^2). \text{ Odatle :}$$

$$R = -981 . \frac{2\pi^2 m}{T^2}\cdot A^2 = -\mathit{45.918}\ \pi^2 \ \textit{erga.}$$

1067. Brzina tijela mijenja se po zakonu $v = 3t^2 - 2t + 1$. Kolik put prevali to tijelo u 10 sekunda? Put kod nejednolikoga gibanja dan je formulom $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$.

$$s = \int_0^{10} v\,dt = \int_0^{10} (3t^2 - 2t + 1)\,dt = \mathit{910} \text{ jedinica.}$$

1068. Nađi formulu za put kod jednolikoga gibanja iz brzine $v = c$ u vremenu t iz općene formule $s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$.

$$s = \int_0^t v\,dt = c\int_0^t dt = c\Big|_0^t t = ct.$$

1069. Nađi formulu za jednoliko ubrženo gibanje iz brzine $v = at$ u vremenu t. — Ako je $a = 10\frac{cm}{sek^2}$, kolik je put prevaljen u 5 sekunda, a kolik u petoj sekundi?

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t at\,dt = a\int_0^t t\,dt = a\Big|_0^t \frac{t^2}{2} = \frac{a}{2}t^2. \ -$$

$$s_5 = \int_0^5 at\,dt = \frac{a}{2}\Big|_0^5 t^2 = 5.25 = \mathit{125}\ cm;\ s_{5'} = \int_4^5 at dt =$$

$$= \frac{a}{2}\Big|_4^5 t^2 = \frac{a}{2}(25-16) = 5.9 = \mathit{45}\ cm.$$

1070. Neko se tijelo giba tako, da mu je brzina dana s $v = 5 + 5t - t^2 + t^3$. Kolik put prevaljuje to tijelo u prvoj, drugoj i trećoj sekundi?

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(5+5t-t^2+t^3)dt;\ s_{1'} = \int_0^1 (5+5t-t^2+t^3)\times$$

$$dt = 5\Big|_0^1 t + \frac{5}{2}\Big|_0^1 t^2 - \frac{1}{3}\Big|_0^1 t^3 + \frac{1}{4}\Big|_0^1 t^4 = 5 + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{89}{12} \textit{ je-}$$

dinica; $s_2 = \int_1^2 v\,dt = 5(2-1) + \frac{5}{2}(4-1) - \frac{1}{3}(8-1) +$

$+ \frac{1}{4}(16-1) = \frac{167}{12}$ *jedinica*. Analogno: $s_3 = \frac{329}{12}$ *jedinica*.

1071. Gdje leži težište homogene ravne žice dužine l, ako je položaj težišta određen formulom $\xi = \frac{\int_0^l x\,dx}{\int_0^l dx}$.

$$\int_0^l x\,dx = \frac{1}{2}\Big|_0^l x^2 = \frac{l^2}{2};\ \int_0^l dx = l;\ \text{dakle: } \xi = \frac{l^2}{2} : l = \frac{l}{2} \quad t.\ j.$$

težište leži u sredini žice.

1072. Težište plohe, što je omeđuje X-os, ordinate i luk krivulje omeđen tim ordinatama, određeno je koordinatama $\xi = \frac{\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx}{P}$, $\eta = \frac{\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx}{P}$, gdje P znači plaštinu omeđenoga lika. — Nađi koordinate težišta plohe, koju zatvaraju X-os, ordinate na mjestima $x = 0$ i $x = 5$ i luk parabole $y^2 = 8x$.

$$P = \int_0^5 \sqrt{8x}\,dx = \frac{20}{3}\sqrt{10};\ \int_0^5 xy\,dx = \int_0^5 x\sqrt{8x}\,dx =$$

$$= \sqrt{8}\int_0^5 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 20\sqrt{10};\ \int_0^5 y^2\,dx = \int_0^5 8x\,dx = 100.$$

Prema tome $\xi = \mathit{3}$, $\eta = \frac{3}{4} . \mathit{10} = \mathit{7{\cdot}5}$.

1073. Biot-Savartov zakon daje za jakost H magnetskog polja u točki P, koje potječe od struje i, kad teče veoma dugom ravnom žicom, ovaj izraz $H = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} k\frac{i\cos\alpha}{r_0}\,d\alpha$. gdje r_0 znači okomitu udaljenost točke P od žice. Nađi vrijednost jakosti polja H.

$$H = \frac{ki}{r_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\pi/2} \cos\alpha\,d\alpha = \frac{ki}{r_0}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\alpha = \frac{ki}{r_0}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi/2)\right],$$

Jer $\frac{\pi}{2}$ znači 90^0 kutne mjere, i jer je $\sin(-90^0) = -\sin 90^0$ slijedi : $H = \frac{2ki}{r^0}$.

1074. **Iz zadatka 1044. razabira se, da se napetost izmjenične struje $E = \Phi \frac{\pi}{T} . \sin \frac{2\pi t}{T}$ može pisati i ovako: $E = E_{max} . \sin \frac{2\pi t}{T}$. Ako se s α označi kut, što ga je načinila kotva dinamostroja u momentu t, onda se gornji izraz dade pisati $E = E_{max} . \sin \alpha$ [u vremenu T načini kotva kut $2\pi (=360^0)$, a u vremenu t načini kut α; dakle $\alpha = \frac{2\pi t}{T}$].** — *Srednja je vrijednost napetosti* **izmjenične struje dana izrazom $E_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E\, d\alpha$, a** *srednja vrijednost jakosti* **te struje izrazom:**

$I_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi I\, d\alpha$, gdje je $I = I_{max} . \sin \alpha$. Nađi snošaj između E_s i E_{max} i između I_s i I_{max}.

$E_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E\, d\alpha = \frac{E_{max}}{\pi} \int_0^\pi \sin \alpha\, d\alpha = -\frac{E_{max}}{\pi} \Big|_0^\pi \cos \alpha$. Jer je $\pi = 180^0$ kutne mjere, to je $\cos \pi = -1$, a $\cos 0^0 = 1$, bit će $E_s = -\frac{E_{max}}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi} E_{max} = 0{\cdot}637 . E_{max}$. Analogno ćeš dobiti $I_s = \frac{2}{\pi} I_{max} = 0{\cdot}637 . I_{max}$.

1075. **Ako izmjenična struja jakosti $I = I_{max} . \sin \frac{2\pi t}{T}$ prolazi žicom otpora R kroz kratko vrijeme dt, porodit će se u žici malena množina topline $dQ = I^2 . R . dt$. Koliko će se topline razviti u vremenu periode T (= vrijeme jednoga titraja)?**

Zbroji sve množine dQ u intervalu vremena (0, T) t. j. integriraj obje strane jednadžbe $dQ = I^2 R dt$ u tom intervalu. Dobit ćeš $Q = \int_0^T I^2 R dt$. Uvrštenjem formule za I moći ćeš pisati $Q = I^2_{max} \times R \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt$. Jer je $\sin^2 \frac{2\pi t}{T} = \frac{1 - \cos 2\frac{2\pi t}{T}}{2}$, dobit ćeš supstitucijom $Q = \frac{1}{2} I^2_{max} . R \int_0^T dt - \frac{1}{2} I^2_{max} \times \int_0^T \cos 2\frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{2} I^2_{max} . RT - \frac{1}{2} I^2_{max} . R \Big|_0^T \frac{\sin 2\frac{2\pi t}{T}}{2\frac{2\pi}{T}} =$

$= \frac{1}{2} I^2_{max} . R . T - \frac{1}{2} I^2_{max} R . \frac{\sin 2\frac{2\pi T}{T}}{2\frac{2\pi T}{T}}$. Kad u razlomku skratiš s T, dobit ćeš $\frac{\sin 2.2\pi}{2.2\pi}$. Ovaj je izraz jednak nuli poradi $\sin 2.2\pi = 0$, pa zato u izrazu za Q otpada drugi član. Prema tome $Q = I^2_{max} . R . \frac{T}{2}$.

1076. **Kroz žicu otpora R teče izmjenična struja elektromotorne sile (napetosti) $E = E_{max} . \sin \frac{2\pi t}{T}$. U malom će se vremenu dt poroditi radi toga u žici mala množina topline $dQ = \frac{E^2}{R} . dt$. Koliko će se topline razviti u žici kroz vrijeme jedne periode T?**

Zbroji sve množine dQ u intervalu vremena (0,T) t. j. integriraj lijevu i desnu stranu jednadžbe $dQ = \frac{E^2}{R} . dt$. Dobit ćeš $Q = \int_0^T \frac{E^2}{R} . dt$. Jer je $E = E_{max} . \sin \frac{2\pi t}{T}$, možeš pisati — stavivši konstante pred znak integrala — ovako: $Q = \frac{E^2_{max}}{R} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt$. Dalji postupak s $\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt$ vidi u pređašnjem zadatku. Dobit ćeš: $Q = \frac{E^2_{max}}{R} . \frac{T}{2}$.

1077. **Srednja vrijednost energije izmjenične struje u polovici periode (polovica jednoga okreta kotve), t. j. u intervalu $(0, \pi)$ dana je formulom $R_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi EI\, d\alpha$; tu je $E = E_{max} . \sin \alpha$, $I = I_{max} . \sin \alpha$. Odredi vrijednost radnje R_s struje.**

$R_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E_{max} \sin \alpha . I_{max} \sin \alpha . d\alpha = \frac{E_{max} . I_{max}}{\pi} \times . \int_0^\pi \sin^2 \alpha\, d\alpha$. Integral $\int_0^\pi \sin^2 \alpha\, d\alpha = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\alpha - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\alpha . d\alpha = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \Big|_0^\pi \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} -$

$- \frac{\sin 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (jer je $\sin 2\pi = 0$). Prema tome je $R_s = \frac{E_{max} \cdot I_{max}}{2} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, t. j. R_s jednaka je produktu efektivnih vrijednosti napetosti i jakosti struje.

1078. **Kroz debelu namotanu žicu (ugušivač) neka teče izmjenična struja napetosti $E = E_{max} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}$, a otpor R žice neka je vrlo malen, dok je koeficijenat vlastite indukcije L velik. Za taj slučaj daje Ohmov zakon ovu relaciju: $L \frac{dI}{dt} = E$. — Kolika je jakost struje i koliko će se topline razviti u žici u intervalu jedne periode?**

Iz $L \frac{dI}{dt} = E$ slijedi $dI = \frac{E}{L} dt$. Kad integriraš obje strane jednadžbe, dobit ćeš: $I = \frac{1}{L} \int E\, dt = \frac{E_{max}}{L} \int \sin \frac{2\pi t}{T} = -\frac{E_{max}}{L} \cdot \frac{\cos \frac{2\pi t}{T}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{E_{max}}{L \cdot \frac{2\pi}{T}} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right)$. Prema uputi u zadatku 1075. jest $Q = \int_0^T I^2 . R\, dt = \frac{E^2_{max} \cdot R}{L^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt$. Jer je $\cos^2 \frac{2\pi t}{T} = \frac{1 + \cos 2 \cdot \frac{2\pi t}{T}}{2}$, slijedi supstitucijom $\int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{2} \Big|_0^T t + \frac{1}{2} \Big|_0^T \frac{\sin 2 \frac{2\pi t}{T}}{2 \cdot \frac{2\pi t}{T}}$. Za $t = T$ drugi član iščezava ($\sin n \cdot 360^0 = 0$), pa dobivaš $Q = \frac{R \cdot E^2_{max}}{L^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \cdot \frac{T}{2}$. Odavle razabiraš, da se ugušivač to manje grije, što mu je žica deblja (manji R).

DODATAK.

§ 35. Nesimetrične jednadžbe višega stepena.

Općena uputa.

Kod rješavanja ovih jednadžbi pomoću Hornerove divizije treba imati na umu, da je apsolutni član (posljednji član, koji ne sadržaje nepoznanice) jednadžbe kanonskoga oblika (t. j. u kojoj je koeficijenat ispred najviše potencije jednak 1) jednak produktu svih korijena jednadžbe. Po apsolutnom se dakle članu jednadžbe može lako pogoditi njezin korijen. Da bude pogađanje lakše, treba znati, koliko je pozitivnih i koliko je negativnih korijena. U tu svrhu pomaže ovaj stavak: **Ako su koeficijenti jednadžbe kanonskoga oblika cijeli brojevi, pa jednadžba uopće ima racionalnih korijena, ti korijeni moraju biti cijeli brojevi, a ima ih pozitivnih toliko, koliko u jednadžbi promjena predznaka.** N. pr. u jednadžbi $x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0$ ima samo jedna promjena predznaka (označeno lukom!), pa prema tome mora imati samo jedan pozitivan korijen i to — ako jednadžba uopće ima racionalnih korijena — cio, a ne razlomak. Ostala su 3 korijena negativna. Hornerovom divizijom zgodnije je početi tražiti one korijene s obzirom na predznak, kojih je više. — Da je neki broj doista korijen jednadžbe, pozna se po tomu, što se na koncu Hornerove divizije dobiva uvijek **nula** (0).

Postupak je Hornerove divizije ovaj: svi se koeficijenti **potpune** jednadžbe $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ispišu u horizontalan redak (dakako i apsolutni član sa svojim prednakom). Ako je zadana nepotpuna jednadžba, mora se u taj redak napisati nula ondje, kamo bi došao koeficijenat potencije, koje nema. Ako je x

korijen jednadžbe, taj se korijen napiše sa strane. Prvi se broj toga retka prepiše u drugi horizontalni redak, i to ispod onoga, koji je u prvom retku. Drugi broj drugoga retka dobije se tako, da se onaj broj, koji je pred njim (u istomu retku) pomnoži s korijenom (s brojem, koji je sa strane) i tomu se produktu pribroji drugi broj prvoga retka. Treći se broj dobije tako, da se broj pred njim (istoga retka) pomnoži s korijenom, a produktu se pribroji treći član prvoga horizontalnoga retka i t. d. Ako je x_1 doista korijen zadane jednadžbe, bit će posljednji član drugoga retka 0. Ako x_1 nije korijen, bit će posljednji član različit od nule. S dobivenim retkom postupa se kao s prvim, jer su dobiveni brojevi koeficijenti jednadžbe stupnja za 1 manjega od zadane jednadžbe. — Sve će ovo razjasniti primjeri, što dolaze.

Riješi jednadžbe :

1079. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$.
Očekuju se 3 ili 1 pozitivan cjelobrojan korijen, jer su 3 promjene predznaka : $+ - + -$. Ispiši koeficijente, a sa strane stavi 3, jer je to faktor od 60.

3	1,	— 12,	47,	— 60.
5	1,	— 9,	20,	0.
4	1	— 4,	0.	
	1	0.		

Tu je s dobivenim drugim retkom postupano kao s prvim. Jer je u 20 faktor 5, dijeljen je taj redak s 5. Dobiveni redak dijeljen je s 4 (jer 2 ne daje posljednji član retka nulu). Korijeni su dakle zadane jednadžbe $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$.

1080. $x^3 - 60x + 671 = 0$.
Jednadžba je nepotpuna ! 671 je djeljivo s 11. Ako dijeliš s 11, ne ćeš dobiti nulu ; dijeli dakle s — 11!

—11	1,	0,	—60,	671
	1,	—11,	61,	0

Jedan je dakle korijen $x_1 = -11$. Druge daje kvadratna jednadžba $x^2 - 11x + 61 = 0$ t. j. $x_{2,3} = \frac{11 \pm i\sqrt{123}}{2}$.

1081. $x^4 + 28x^3 + 42x^2 - 3452x - 19019 = 0$.
Promjena predznaka ima jedna. Apsolutni član je djeljiv s 11, pa će korijen biti možda + 11. Pokus :

11	1,	28,	42,	—3452,	—19019
—7	1,	39,	471,	1729,	0.
	1,	32,	247,	0.	

Prva dva su korijena $x_1 = 11$, $x_2 = -7$, a druga dva daje kvadratna jednadžba $x^2 + 32x + 247 = 0$ t. j. $x_3 = -13$, $x_4 = -19$.

1082. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
Tri su promjene predznaka. Sva će tri korijena možda biti pozitivna. Na prvi se pogled razabira, da je $x_1 = 1$. Dakle :

1	1,	—6,	11,	—6
	1,	—5,	6,	0.

Jednadžba $x^2 - 5x + 6 = 0$ daje $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

1083. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.
Ovdje su 4 promjene predznaka; očekivati je 4 pozitivna korijena. $24 = 1 . 2 . 3 . 4$. Između ovih faktora traži korijene. Na prvi se pogled razabira, da je $x_1 = 1$. Dakle :

1	1,	—10,	35,	—50,	24
2	1,	—9,	26,	—24,	0
3	1,	—7,	12,	0	
4	1,	—4,	0		
	1,	0			

t. j. $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

1084. $x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0$.
Ovdje su 3 promjene predznaka. Očekujemo 3 pozitivna cijela korijena $36 = 1 . 2^2 . 3^2$. Odmah se vidi, da je $x_1 = 1$ (kad 1 u glavi uvrstiš u zadanu jednadžbu). Prema tome :

1	1, —1, —13, 13, 36, —36
2	1, 0, —13, 0, 36, 0
—2	1, 2, — 9, —18, 0
3	1, 0, — 9, 0
—3	1, 3, 0
	1, 0.

t. j. $x_{2,3} = \pm 2$, $x_{4,5} = \pm 3$.

1085. $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$.
Ovdje ima 6 promjena predznaka, pa očekujemo 6 ili 4 pozitivna korijena. Jer je apsolutni član 1, počni dijeliti s 1 dva puta po redu.

1	1, —6, 14, —18, 14, —6, 1
1	1, —5, 9, — 9, 5, —1, 0
	1, —4, 5, — 4, 1, 0

Dalje se dijeliti ne da; zato recipročnu jednadžbu $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ riješi običnim načinom (podijelivši je prije s x^2 sakupi simetrične članove i uvedi novu nepoznanicu $x + \frac{1}{x} = y$, dosljedno $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$). Korijeni su $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{5,6} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

1086. $6x^7 - 29x^6 + 21x^5 + 56x^4 - 56x^3 - 21x^2 + 29x - 6 = 0$.
To je recipročna jednadžba, pa bi se dala riješiti običnim načinom; no dade se riješiti i pomoću Hor. divizije. Očekujemo 4 pozitivna korijena. Kad se jednadžba svede na kanonski oblik (podijelivši je s 6), vidi se, da joj je apsolutni član — 1. Zato počni Hor. diviziju s 1, a zatim dvaput dijeli s —1.

1	6, —29, 21, 56, —56, —21, 29, —6
—1	6, —23, —2, 54, —2, —23, 6, 0
—1	6, —29, 27, 27, —29, 6, 0
2	6 —35, 62, —35, 6, 0
3	6, —23, 16, —3, 0
	6, —5, 1, 0.

Korijeni su dakle $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$, a jer je jednadžba simetrična (recipročna), mora biti $x_6 = \frac{1}{2}$, $x_7 = \frac{1}{3}$. Odavle razabiraš, da jednadžba kanonskoga oblika s razlomljenim koeficijentima **može** imati cjelobrojnih korijena.

1087. $x^7 - 2x^6 - 2x^5 + 5x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$.
Jednadžba je nepotpuna, jer nema člana s x. Zato moraš kod Hor. divizije ispuniti to mjesto s 0. Promjena predznaka ima 3; očekujemo dakle 3 pozitivna korijena. Dijeljenje počni s +1 i s —1 i s njima dijeli tako dugo, dok ide.

1	1, —2, —2, 5, 1, —4, 0, 1
1	1, —1, —3, 2, 3, —1, —1, 0
1	1 0, —3, —1, 2, 1, 0
—1	1 1, —2, —3, —1, 0
—1	1, 0, —2, —1, 0
	1, —1, —1, 0

t. j. $x_{1,2,3} = 1$, $x_{4,5} = -1$; jenaddžba $x^2 - x - 1 = 0$ daje $x_{6,7} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

1088. $8x^3 + 10x^2 + 15x + 27 = 0$.
Promjene predznaka nema; bit će dakle negativnih korijena. Cijelih korijena ne možeš očekivati, jer su koeficijenti u kanonskom obliku jednadžbe razlomci. Jer je apsolutni član $\frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, pokušaj dijeliti s $-\frac{3}{2}$.

$-\frac{3}{2}$	8, 10, 15, 27
	8, —2, 18, 0

t. j. $x_1 = -\frac{3}{2}$, a jednadžba $8x^2 - 2x + 18 = 0$ daje $x_{2,3} = \frac{1\pm i\sqrt{144}}{8}$.

1089. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$.
$x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 4$.

1090. $x^3 + 48x + 504 = 0$.
Nepotpuna jednadžba! Pozitivnih korijena nema.
$x_1 = -6$, $x_{2,3} = 3\pm 5i\sqrt{3}$.

1091. $27x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0.$
Cijelih korijena ne možeš očekivati. Apsolutni je član
$-\frac{8}{27} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3.$ $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_{2,3} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{9}.$

1092. $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0.$
Nepotpuna jednadžba ! $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ $x_4 = -6.$

1093. $x^4 - 7x^2 - 12x + 18 = 0.$
Nepotpuna jednadžba! $x_1 = 1_1$ $x_2 = 3$, $x_{3,4} = -2 \pm i\sqrt{2}.$

1094. $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0.$
$x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3.$

1095. $12x^4 + 8x^3 - 149x^2 + 47x + 12 = 0.$
Ne mora imati cijelih korijena, ali možda koji ima. Zato kušaj dijeliti redom, s ± 1, ± 2, ± 3, ± 4.
$x_1 = 3$ $x_2 = -4$, $x_3 = -\frac{1}{6}$, $x_4 = \frac{1}{2}.$

1096. $x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 36x^2 - 36x = 0.$
$x_1 = 0$ (jer se x u jednadžbi dade izlučiti),
$x_{2,3} = 2$, $x_{4,5} = \pm 3.$

1097. $2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0.$
$x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$ $x_{4,5} = 1 \pm i.$

1098. $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0.$
Dijeli redom s ± 1, ± 2, ± 3, a jednadžbu prije upotpuni nulama.

1	1,	0,	—14,	0,	49,	0,	—36
—1	1,	1,	—13,	—13,	36,	36,	0
2	1,	0,	—13,	0,	36,	0	
—2	1,	2,	— 9,	—18,	0		
3	1,	0,	— 9,	0			
—3	1,	3,	0				
	1,	0					

t. j. $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$, $x_{5,6} = \pm 3.$

1099. $2x^6 - 3x^5 - 52x^4 - 129x^3 - 136x^2 - 66x - 12 = 0.$
$x_{1,2} = -1$ $x_3 = -2$ $x_4 = -\frac{1}{2}$, $x_{5,6} = 3 \pm i\sqrt{3}.$

1100. $9x^7 - 45x^6 - 10x^5 + 350x^4 - 319x^3 - 557x^2 +$
$+ 928x - 356 = 0.$
$x_{1,2,3} = 1$, $x_{4,5} = -2$, $x_{6,7} = \frac{3 \pm 2i\sqrt{2}}{3}.$

1101. $4x^7 - 10x^6 - 2x^5 + 17x^4 - 9x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0.$
Od ove jednadžbe ne možeš očekivati samo cijele korijene nego i razlomljene. Jer je apsolutni član $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$, dijeli i s $\frac{1}{2}$. Prije svega dijeli s ± 1.
Dobit ćeš $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$, $x_{6,7} = \frac{1 \pm i}{2}.$

1102. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0.$
$x_{1,2} = -2$, $x_3 = 2.$

1103. $x^3 + 3x^2 + 15x + 125 = 0.$
$x_1 = -5$, $x_{2,3} = 1 \pm 2i\sqrt{6}.$

1104. $x^3 + ax^2 + bx + \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 0.$
$x_1 = -\frac{b}{a}$, $x_{2,3} = \frac{b - a^2}{2a} \pm \frac{\sqrt{a^4 - 2a^2b - 3b^2}}{2a}.$

1105. $x^3 + ax^2 - bx - \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 0.$
$x_1 = \frac{b}{a}$, $x_{2,3} = -\frac{b + a^2}{2a} \pm \frac{\sqrt{a^4 + 2a^2b - 3b^2}}{2a}.$

1106. **Suma kvadrata prirodnih brojeva jest 385. Koliko je uzeto članova u prirodnom nizu brojeva 1, 2, 3.... ?**
Suma kvadrata od n prvih članova u prirodnom nizu dana je formulom $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Dobit ćeš nesimetričnu jednadžbu: $2n^3 + 3n^2 + n - 2310 = 0$. Po naravi zadatka ima ova jenadžba jedan cio korijen. Traži Hornerovom divizijom. $n = 10.$

1107. **Suma beskonačnoga geometrijskoga niza jest 2, a peti mu je član $\frac{1}{16}$. Koji je to niz?**
Ako $a_1 q^4 = \frac{1}{16}$ podijeliš s $\frac{a_1}{1-q} = 2$, dobit ćeš:
$q^5 - q^4 + \frac{1}{32} = 0.$

$\frac{1}{2}$	1,	—1,	0,	0,	0	$\frac{1}{32}$
	1,	$-\frac{1}{2}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{16}$	0

t. j. $q=\frac{1}{2}$; iz $\frac{a_1}{1-q}=2$ slijedi $a_1=1$. Niz jest: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ ad inf.

1108. **Koliko elemenata daje 10 terna bez ponavljanja?**
$\binom{n}{3}=10$ ili $n^3-3n^2+2n-60=0$. Po naravi zadatka jednadžba mora imati pozitivan cio korijen. Traži ga Hornerovom divizijom. $n=5$.

1109. **Koliko elemenata daje 70 kvaterna bez ponavljanja?**
$\binom{n}{4}=70$ ili $n^4-6n^3+11n^2-6n-1680=0$. Ispoiredi uputu prijašnjega zadatka. $n=8$.

1110. **Koliko elemenata daje 792 kvinterne bez ponavljanja?**
$\binom{n}{5}=792$ ili $n^5-10n^4+35n^3-50n^2+24n-95040=0$. $n=12$.

1111. **Kolik mora biti eksponenat u izrazu $(x+y)^n$, ako je koeficijenat petoga člana 35?**
$a_5=\binom{n}{4}=35$ ili $n^4-6n^3+11n^2-6n-840=0$. $n=7$.

1112. **Anaksem želeći uzeti Ezopa u službu upita ga, koliko mu je godina. Ovaj mu odgovori: „Ako kvadrat mojih godina odbiješ od kvadrata godina mojega oca, dobit ćeš broj $35\frac{4}{9}$ puta veći od četverostrukoga broja mojih godina. Ako polovicu godina mojega oca odbiješ od kvadrata četvrtine mojih godina, te od onoga, što izađe, odbiješ broj mojih godina, dobit ćeš šesnaestinu dobi mojega oca." Koliko je godina Ezopu, a koliko njegovu ocu?**
Ezopove godine neka budu označene s x, a godine njegova oca s y. Dobit ćeš jednadžbe $y^2-x^2=\frac{319}{9}4x$, $\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{y}{2}-x=\frac{y}{16}$. Druga jednadžba daje $y=\frac{x(x-16)}{9}$, a uvrštena u prvu daje $x^3-32x^2+175x-11484=0$. Narav zadatka traži pozitivan korijen, koji će biti cio broj, a veliki apsolutni član kazuje, da će taj korijen biti dosta velik broj. Jer

je 36 faktor apsolutnoga člana, obavi Hornerovu diviziju s 36. Dobit ćeš $x=36$. Jednadžba $\left(\frac{x}{4}\right)^2-\frac{y}{2}-x=\frac{y}{16}$ daje $y=80$.

1113. **Otac upitan, koliko je godina sinu, odgovori: „Ako odbiješ od kuba godina sina, od kojega sam triput stariji, kvadrat mojih godina, dobit ćeš 44." Koliko ima godina sin, a koliko otac?**
Sinove godine označi s x, a očeve s y. Dobit ćeš jednadžbe $x^3-y^2-6y=44$, $y=3x$, koje daju $x^3-9x^2-18x-44=0$. Apsolutni član daje naslućivati, da je korijen te jednadžbe 11. Dijeleći Hornerovom divizijom uvjerit ćeš se, da je $x=11$; prema tome $y=33$.

1114. **Ako neki broj umanjiš za 2, pa to pomnožiš s kvadratom prvobitnoga broja, a produktu dodaš 6, dobit ćeš 5-struki prvobitni broj. Koji je to broj?**
$(x-2).x^2+6=5x$ ili $x^3-2x^2-5x+6=0$.
$x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$. Moguća su tri takva broja.

SADRŽAJ:

